

# 統計モデリング入門 2019 (g)

階層ベイズモデルと時間変化モデル

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp

北大環境科学院の講義 <http://goo.gl/76c4i>

2019-08-06

ファイル更新時刻: 2019-06-07 15:18

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 1 / 42

もくじ

## この時間で説明したいこと

- ① 複数ランダム効果の階層ベイズモデル  
個体差 + グループ差, など
- ② 時間変化の階層ベイズモデル  
一回だけの变化: “対応のある” (paired) データセット

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 2 / 42

もくじ

## GLMM is a simplified Hierarchical Bayesian Model

線形モデルの発展

階層ベイズモデル (HBM) ← もっと自由な統計モデリング設計

一般化線形混合モデル (GLMM) ← 個体差、グループ差といった変量効果をあつかいたい

一般化線形モデル (GLM) ← 正規分布以外の確率分布をあつかいたい

線形モデル (LM) ← 最小二乗法

推定計算方法: MCMC

最尤推定法

### 一般化線形混合モデル (Generalized Linear Mixed Model) は階層ベイズモデルのひとつ

- GLMM: (individual differences) + (group differences) + ...
- HBM: to estimate posterior distributions

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 3 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

## 1. 複数ランダム効果の階層ベイズモデル

個体差 + グループ差, など

You can not neglect these “differences”

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 4 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

## seed number data, complicated design

- 肥料をやったら個体ごとの種子数  $y_i$  が増えるかどうかを調べたい
- 植木鉢 10 個, 各鉢に 10 個体の架空植物 (合計 100 個体)
  - コントロール ( $f_j = C$ ) 5 鉢 (合計 50 個体)
  - 肥料をやる処理 ( $f_j = T$ ) 5 鉢 (合計 50 個体)

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 5 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

## y: number of seeds

```

> d <- read.csv("d1.csv")
> head(d)
  id pot f y
1  1  A  C  6
2  2  A  C  3
3  3  A  C 19
4  4  A  C  5
5  5  A  C  0
6  6  A  C 19
    
```

- id 列: 個体番号 {1, 2, 3, ..., 100}
- pot 列: 植木鉢名 {A, B, C, ..., J}
- f 列: 処理: コントロール C, 肥料 T
- y 列: 種子数 (応答変数)

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 6 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### データはとにかく図示する!!

- `plot(d$id, d$y, pch = as.character(d$pot), ...)`
- コントロール・処理 でそんなに差がない?

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 7 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### Plot your data!

- むしろ 処理 のほうが平均種子数が低い?
- (注) この架空データは 肥料の効果はゼロ と設定して生成した

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 8 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### individual + pot differences

- `plot(d$pot, d$y, col = rep(c("blue", "red"), each = 5))`
- 植木鉢由来の random effects みたいなものは **ブロック差** と呼ばれる

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 9 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### (一般化な) 線形モデルのわくぐみで, とりあえず考えてみる

線形モデルの発展

階層ベイズモデル (HBMM) 推定計算方法 MCMC  
 もっと自由な統計モデリングを! 一般化線形混合モデル (GLMM) 最尤推定法  
 個体差・場所差といった変量効果をつかいたい 一般化線形モデル (GLM) 最小二乗法  
 正規分布以外の確率分布をつかいたい 線形モデル (LM)

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 10 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### GLM: 個体差もブロック差も無視

```
> summary(glm(y ~ f, data = d, family = poisson))
...(略)...
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )
(Intercept)	1.8931	0.0549	34.49	< 2e-16
fT	-0.4115	0.0869	-4.73	2.2e-06

...(略)...

- 肥料をやる処理 (f) をすると, 平均種子数が下がる?
- AIC でモデル選択しても同じような結果に

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 11 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### GLMM: 個体差だけ考慮, ブロック差は無視

```
> library(glmmML)
> summary(glmmML(y ~ f, data = d, family = poisson,
+ cluster = id))
...(略)...
```

	coef	se(coef)	z	Pr(> z )
(Intercept)	1.351	0.192	7.05	1.8e-12
fT	-0.737	0.280	-2.63	8.4e-03

...(略)...

- やっぱり同じ?
- むしろ肥料処理の悪影響が強い?

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 12 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### HBM: individual + block differences

- ここでは log リンク関数を使う
- 平均の対数  $\log(\lambda_i) = a + bf_i + (\text{個体差}) + (\text{ブロック差})$
- 事前分布の設定
  - 切片  $a$  と  $f_i$  の係数  $b$  は無情報事前分布 (すごく平らな正規分布)
  - 個体差とブロック差は階層的な事前分布 (それぞれ標準偏差  $\sigma_1, \sigma_2$  の正規分布, 平均はゼロ)
  - 標準偏差  $\sigma_*$  は無情報事前分布  $([0, 10^4])$  の一様分布

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 13 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### Diagram of the Hierarchical Bayesian Model

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 14 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### JAGS: to estimate posterior distributions

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 15 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### 個体差 + ブロック差のあるポアソン回帰の BUGS code (1)

```

model
{
  for (i in 1:N.sample) {
    Y[i] ~ dpois(lambda[i])
    log(lambda[i]) <- a + b * F[i] + r[i] + rp[Pot[i]]
  }
  # 次のページの事前分布の定義につづく
}
    
```

ここでの BUGS coding のポイント

- 因子型の説明変数  $f_i \in \{C, T\}$  は, それぞれ  $F[i]$  を 0, 1 と置きかえる
- $Pot[i]$  は 1, 2, ..., 10 と数字になおした植木鉢名をいれておいて, 植木鉢の効果  $rp[\dots]$  を参照させる

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 16 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### 個体差 + ブロック差のあるポアソン回帰の BUGS code (2)

```

# 前のページからのつづき
a ~ dnorm(0, 1.0E-4) # 切片
b ~ dnorm(0, 1.0E-4) # 肥料の効果
for (i in 1:N.sample) {
  r[i] ~ dnorm(0, tau[1]) # 個体差
}
for (j in 1:N.pot) {
  rp[j] ~ dnorm(0, tau[2]) # 植木鉢の差 (ブロック差)
}
for (k in 1:N.tau) {
  tau[k] <- 1.0 / (sigma[k] * sigma[k]) # 個体・植木鉢のばらつき
  sigma[k] ~ dunif(0, 1.0E+4)
}
}
    
```

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 17 / 42

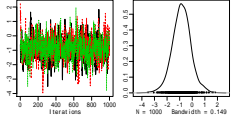
複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### MCMC sampling

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 18 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### Yes! no fertilization effects ( $b$ )



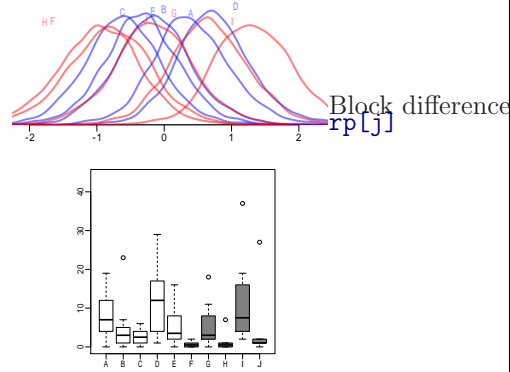
	mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	Rhat
a	1.501	0.529	0.482	1.157	1.493	1.852	2.565	1.00
b	-1.016	0.706	-2.436	-1.476	-0.993	-0.565	0.395	1.00
sigma[1]	1.020	0.114	0.822	0.939	1.014	1.089	1.265	1.00

Example data was generated under “(fertilization effects = 0)”

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 19 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### Posteriors of Block (or Pot)



Block difference  $rp[j]$

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 20 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### Do not neglect individual and groups differences!

- **random effects** つまり 個体差・ブロック差が大きい
- **random effects** の影響が大きいときには, **fixed effects** の大きさが見えにくくなる— ニセの「効果」が見えることもあれば, 見えるはずの傾向が隠されることも
  - 個体差・ブロック差の階層ベイズモデルが必要!
- もしブロック差を人為的に小さくできないなら, ブロック数をもっと増やして, より正確な**植木鉢の効果のばらつき**を正確に推定するしかない

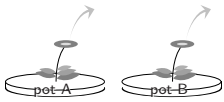
kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 21 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### differences both in plants and pots 個体差 + 場所差の GLMM I

(A) 個体・植木鉢が反復  

 個体差も植木鉢差も推定できない  
 $\text{logit}q_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$  (GLM)  
 $q_i$ : 種子の生存確率

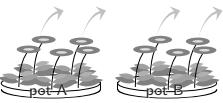
(B) 個体は擬似反復, 植木鉢は反復  

 個体差は推定できる  
 植木鉢差は推定できない  
 $\text{logit}q_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + r_i$

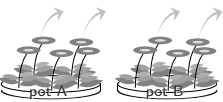
より正確にいうと (A) (B) は個体差と植木鉢差の区別がつかない

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 22 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### differences both in plants and pots 個体差 + 場所差の GLMM II

(C) 個体は反復, 植木鉢は擬似反復  

 個体差は推定できない  
 植木鉢差は推定できる  
 $\text{logit}q_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + r_j$

(D) 個体・植木鉢が擬似反復  

 個体差も植木鉢差も推定できる  
 $\text{logit}q_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + r_i + r_j$

複雑なモデルほど最尤推定は困難, しかも多くのデータが必要

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 23 / 42

複数ランダム効果の階層ベイズモデル 個体差 + グループ差, など

### GLMM は階層ベイズモデル (HBM) で!

- 現実のデータ解析では個体差・場所差の効果を統計モデルに組みこまなければならない
- これらは歴史的には random effects とよばれてきた
- 用語の整理: 統計モデルには **global parameter** と **local parameter** があると考えればよい
- GLMM では **global parameter** を最尤推定する— **local parameter** は積分して消す
- **local parameter** が増えたと (e.g. 個体差 + 場所差) 最尤推定が難しい → 階層ベイズモデル (Hierarchical Bayesian Model) で事後分布 (posterior) 推定!

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 24 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット


## 2. 時間変化の階層ベイズモデル

一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 25 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット

### 架空の実験: 給食タイプ→小学生の身長伸び



岩波データサイエンス vol.1

久保が書いた階層ベイズモデルの解説記事の例題

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 26 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット

### 架空の実験: 給食タイプ→小学生の身長伸び

調査地 (県)	給食 タイプ	標本サイズ		身長平均 (cm)		身長標準偏差	
		1回目	2回目	1回目	2回目	1回目	2回目
A	T	55	51	151.36	157.27	2.94	2.98
B	T	53	49	151.56	156.83	3.07	3.14
C	C	55	53	152.22	157.08	3.20	3.21
D	T	53	52	153.09	156.00	2.65	2.64
E	T	58	55	153.22	157.24	3.07	3.03
F	C	55	53	153.31	157.22	3.10	3.13
G	C	58	53	152.98	157.81	2.49	2.45
H	C	59	57	153.27	158.95	3.08	3.06
I	T	56	51	152.67	156.82	2.82	2.92
J	C	56	50	155.37	161.71	3.10	3.21

- 給食タイプ T (新型) : A, B, D, E, I 県
- 給食タイプ C (普通) : C, F, G, H, J 県

**新型給食 f=T の真の効果は 0!**

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 27 / 42

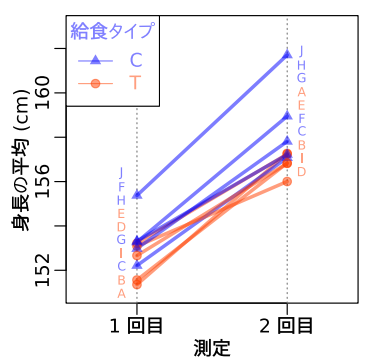
時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット

City	Treatment	Sample size		Mean		SD	
		year 1	year 2	y1	y2	y1	y2
A	T	55	51	151.36	157.27	2.94	2.98
B	T	53	49	151.56	156.83	3.07	3.14
C	C	55	53	152.22	157.08	3.20	3.21
D	T	53	52	153.09	156.00	2.65	2.64
E	T	58	55	153.22	157.24	3.07	3.03
F	C	55	53	153.31	157.22	3.10	3.13
G	C	58	53	152.98	157.81	2.49	2.45
H	C	59	57	153.27	158.95	3.08	3.06
I	T	56	51	152.67	156.82	2.82	2.92
J	C	56	50	155.37	161.71	3.10	3.21

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 28 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット

### (架空) データ: 給食と身長成長



身長平均 (cm)

給食タイプ

- ▲ C
- T

1回目 2回目 測定

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 29 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: “対応のある” (paired) データセット

### ダメな GLM: bad model 1

調査地 (県)	給食 タイプ	標本サイズ		身長平均 (cm)		身長標準偏差	
		1回目	2回目	1回目	2回目	1回目	2回目
A	T	55	51	151.36	157.27	2.94	2.98
B	T	53	49	151.56	156.83	3.07	3.14
C	C	55	53	152.22	157.08	3.20	3.21
D	T	53	52	153.09	156.00	2.65	2.64
E	T	58	55	153.22	157.24	3.07	3.03
F	C	55	53	153.31	157.22	3.10	3.13
G	C	58	53	152.98	157.81	2.49	2.45
H	C	59	57	153.27	158.95	3.08	3.06
I	T	56	51	152.67	156.82	2.82	2.92
J	C	56	50	155.37	161.71	3.10	3.21

(例) `fit <- glm(y ~ t + t:f, ...)`

測定回数: `t = 1` または `2` (1回目, 2回目)

給食タイプ: `f = C` または `T`

kubostat2019g (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 30 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### ダメな GLM: bad model 1

身長 (cm) の平均

測定 1回目 2回目

(例) `fit <- glm(y ~ t + t:f, ...)`  
 測定回数:  $t = 1$  または  $2$  (1回目, 2回目)  
 給食タイプ:  $f = C$  または  $T$

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 31 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### 対応 (paired) が考慮されてない!

身長 (cm) の平均

測定 1回目 2回目

ダメな GLM: bad model 1  
`glm(y ~ t + t:f, ...)`

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 32 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### bad model 1 による第一種の過誤の悪化

$p < 0.05$  となる  
確率が異常に高い

p-value

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 33 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### R と JAGS

Input: モデルの構造, データとパラメータの初期値, サンプルの詳細

Output: 事後分布からのランダムサンプル (Traces of beta[1], Density of beta[1], Trace of beta[2], Density of beta[2])

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 34 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### bad model 1 を Bayes model 化

データ: 平均身長  $mean.Y[i]$ , 観測年  $Age[i]$ , 給食タイプ  $X[i]$

パラメータ:  $mu[i]$ ,  $sd$ ,  $beta[k]$

事前分布:  $mu[i] \sim \text{Normal}(\mu[i], sd)$ ,  $beta[k] \sim \text{Uniform}(-10^4, 10^4)$

凡例: 正規分布, 一様分布

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 35 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### bad model 1 による第一種の過誤の悪化

新給食が身長増加に与える効果

しかし...

新給食  $f=T$  の真の効果は 0!

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 36 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### bad model 2: 各県独立 Bayes 版

Bayes model でもダメなものはダメ...

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 37 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### Hierarchical Bayesian Model

全データ

県 A のデータ 県 B のデータ 県 C のデータ

$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_{10}\}$  局所的パラメーター 県ごとの差

$sd, \beta_1, \beta_2$  大域的パラメーター 全県共通

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 38 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### Hierarchical Bayesian Model

データ 年 i 県 j の 平均身長 mean. Y[i, j]	データ 平均身長の 標準誤差 SE[i, j]	データ 観測年 Age[i] 給食タイプ X[j]
-------------------------------------	----------------------------	------------------------------

身長増加の県差  $r[2, j]$

身長平均の県差  $r[1, j]$

階層事前分布  $0, sd[1]$   $0, sd[2]$

無情報事前分布  $-10^4, 10^4$   $0, 10^4$

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 39 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### Hierarchical Bayesian Model

```

1 model
2 {
3   for (i in 1:2) { # age
4     for (j in 1:N.pref) {
5       Y.mean[i, j] ~ dnorm(mu[i, j], Tau.se[i, j])
6       mu[i, j] <- beta[1] + r[1, j] + (
7         beta[2] + beta[3] * X[i, j] + r[2, j]
8       ) * Age[i, j]
9     }
10  }
11  for (k in 1:N.beta) {
12    beta[k] ~ dunif(-1.0E+4, 1.0E+4)
13  }
14  for (i in 1:N.r) {
15    for (j in 1:N.pref) {
16      r[i, j] ~ dnorm(0, tau[i])
17    }
18    tau[i] <- 1 / (sd[i] * sd[i])
19    sd[i] ~ dunif(0, 1.0E+4)
20  }
21 }
    
```

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 40 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### Hierarchical Bayesian Model による推定結果

bad model 1

$p = 0.0246$

HBM

$p = 0.1434$

新型給食  $f=T$  の真の効果は 0!

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 41 / 42

時間変化の階層ベイズモデル 一回だけの変化: "対応のある" (paired) データセット

### 各県の local parameter

A B C I D G F E H J

D F E C G I H B A J

kubostat2019g (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2019 (g) 2019-08-06 42 / 42