統計モデリング入門 2017 (e)

一般化線形モデル: ロジスティック回帰

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp

北大環境科学院の講義 http://goo.gl/76c4i

2019–08–05

ファイル更新時刻: 2019–07–18 17:28

今日のハナシ I

❶ “N 個のうち y 個が生きてる” タイプのデータ
上限のあるカウントデータ

❷ ロジスティック回帰の部品
二項分布 binomial distribution と logit link function

❸ ちょっとだけ 交互作用項 について
線形予測子の中の複雑な項 complicate terms in linear predictor

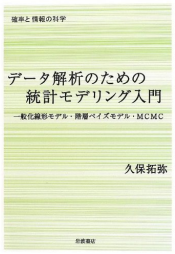
❹ 何でも「割算」するな!
「脱」割算の offset 項わざ

今日の内容と「統計モデリング入門」との対応

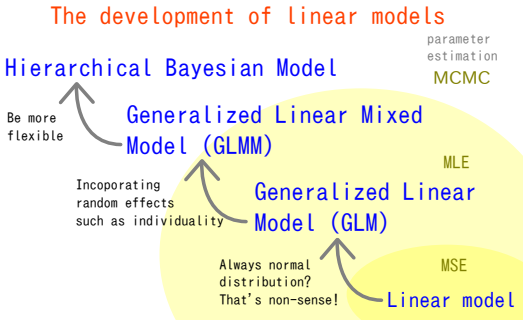
今日はおもに「第 6 章 GLM の応用範囲をひろげる」の内容を説明します.

- 著者: 久保拓弥
- 出版社: 岩波書店
- 2012–05–18 刊行

http://goo.gl/Ufq2



この授業であつかう統計モデルたち



一般化線形モデルって何だろう?

一般化線形モデル (GLM)

- ポアソン回帰 (Poisson regression)
- ロジスティック回帰 (logistic regression)
- 直線回帰 (linear regression)
- ……

一般化線形モデルを作る

一般化線形モデル (GLM)

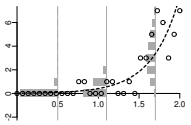
- 確率分布は?
- 線形予測子は?
- リンク関数は?

もくじ

GLM のひとつである**ポアソン回帰**モデルを指定する

ポアソン回帰のモデル

- **確率分布**: **ポアソン分布**
- **線形予測子**: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- **リンク関数**: **対数リンク関数**

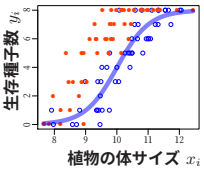


もくじ

GLM のひとつである logistic **回帰モデル**を指定する

ロジスティック回帰のモデル

- **確率分布**: **二項分布**
- **線形予測子**: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- **リンク関数**: logit **リンク関数**



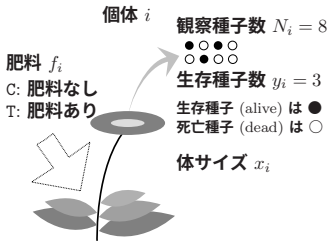
1. “N 個のうち y 個が生きてる” タイプのデータ

上限のあるカウントデータ

$$y_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 8\}$$

またいつもの例題? …… ちょっとちがう

8 個の種子のうち y 個が **発芽可能** だった! …… というデータ



データファイルを読みこむ R

data4a.csv **は** CSV (comma separated value) format file **なので，**R **で読みこむには以下のようにする**:

```
> d <- read.csv("data4a.csv")
```

or

```
> d <- read.csv(
+ "http://hosho.ees.hokudai.ac.jp/~kubo/stat/2015/Fig/binomial/data4a.csv")
```

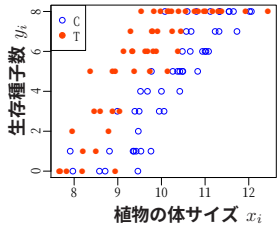
データは d **と名付けられた** data frame (**「表」みたいなもの**) **に格納される**

data frame d を調べる

```
> summary(d)
       N          y               x          f
 Min.   :8   Min.   :0.00   Min.   : 7.660   C:50
 1st Qu.:8   1st Qu.:3.00   1st Qu.: 9.338   T:50
 Median :8   Median :6.00   Median : 9.965
 Mean   :8   Mean   :5.08   Mean   : 9.967
 3rd Qu.:8   3rd Qu.:8.00   3rd Qu.:10.770
 Max.   :8   Max.   :8.00   Max.   :12.440
```

まずはデータを図にしてみる

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f])
> legend("topleft", legend = c("C", "T"), pch = c(21, 19))
```



今回は施肥処理 がきいている?

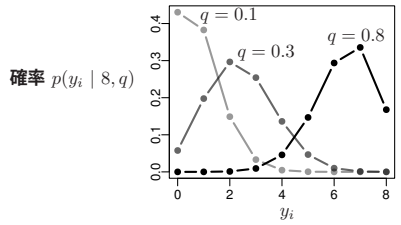
2. ロジスティック回帰の部品

二項分布 binomial distribution と logit link function

二項分布: N 回のうち y 回，となる確率

$$p(y \mid N, q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}$$

$\binom{N}{y}$ は「N 個の観察種子の中から y 個の生存種子を選びだす場合の数」

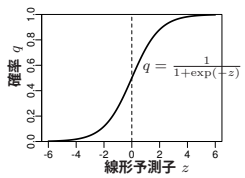


ロジスティック曲線とはこういうもの

ロジスティック関数の関数形 (z_i: 線形予測子，e.g. $z_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$)

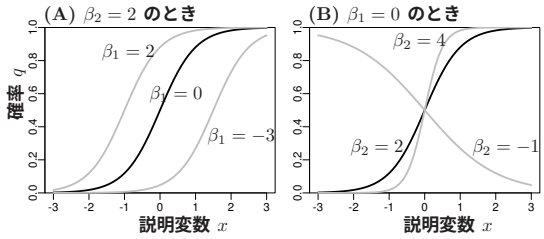
$$q_i = \mathrm{logistic}(z_i) = \frac{1}{1 + \exp(-z_i)}$$

```
> logistic <- function(z) 1 / (1 + exp(-z)) # 関数の定義
> z <- seq(-6, 6, 0.1)
> plot(z, logistic(z), type = "l")
```



パラメーターが変化すると……

黒い曲線は $\{\beta_1, \beta_2\} = \{0, 2\}$. (A) $\beta_2 = 2$ と固定して β_1 を変化させた場合．(B) $\beta_1 = 0$ と固定して β_2 を変化させた場合．



パラメーター $\{\beta_1, \beta_2\}$ や説明変数 x がどんな値をとっても確率 q は $0 \le q \le 1$ となる便利な関数

logit link function

- logistic 関数

$$q = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_1 + \beta_2 x))} = \mathrm{logistic}(\beta_1 + \beta_2 x)$$

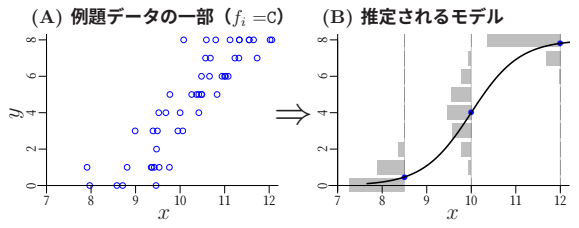
- logit 変換

$$\mathrm{logit}(q) = \log \frac{q}{1-q} = \beta_1 + \beta_2 x$$

logit は logistic の逆関数，logistic は logit の逆関数

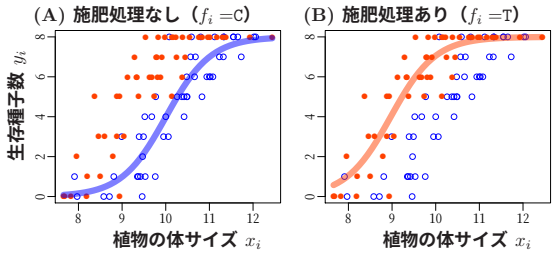
logit is the inverse function of logistic function, vice versa

R でロジスティック回帰 — β_1 と β_2 の最尤推定




```
> glm(cbind(y, N - y) ~ x + f, data = d, family = binomial)
...
Coefficients:
(Intercept)            x           fT
    -19.536         1.952        2.022
```


統計モデルの予測: 施肥処理によって応答が違う



3. ちょっとだけ 交互作用項 について

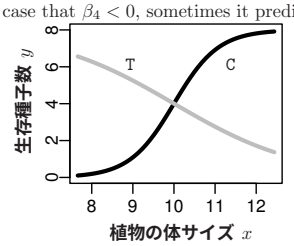
線形予測子の中の複雑な項 complicate terms in linear predictor

ロジスティック回帰を例に

交互作用項 とは何か?

$$\mathrm{logit}(q) = \log \frac{q}{1-q} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 f + \beta_4 x f$$

... in case that $\beta_4 < 0$, sometimes it predicts ...



4. 何でも「割算」するな!

「脱」割算の offset 項わざ

ポアソン回帰を強めてみる

割算値ひねくるデータ解析はなぜよくないのか?

- data / data がどんな確率分布にしたがうのか見とおしが悪く，さらに説明要因との対応づけが難しくなる
- 情報が失われる: 「10 打数 3 安打」 と「200 打数 60 安打」，「どちらも 3 割バッター」と言ってよいのか?
- 割算値を使わないほうが見とおしのよい，合理的なデータ解析ができる (今回の授業の主題)
- したがって割算値を使ったデータ解析は不利な点ばかり，そんなことをする必要性はどこにもない

避けられるわりざん

- **避けられる割算値**
  - 確率

    例: N 個のうち y 個にある事象が発生する確率

    対策: ロジスティック回帰など二項分布モデルで
  - 密度などの指数

    例: 人口密度，specific leaf area (SLA) など

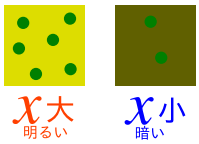
    対策: offset 項わざ — このあと解説!

避けにくいわりざん

- **避けにくい割算値**
  - 測定機器が内部で割算した値を出力する場合
  - 割算値で作図せざるをえない場合があるかも

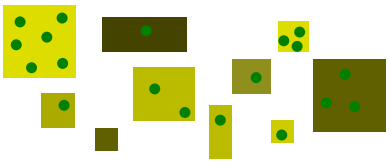
offset 項の例題: 調査区画内の個体密度

- 何か架空の植物個体の密度が「明るさ」 x に応じて どう変わるかを知りたい
- 明るさ は $\{0.1, 0.2, \cdots, 1.0\}$ の 10 段階で観測した



これだけなら単純に `glm(..., family = poisson)` とすればよいのだが ……

「場所によって調査区の面積を変えました」?!



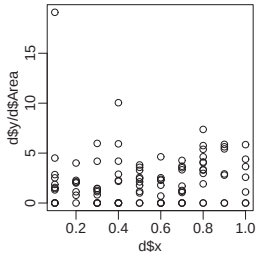
- 明るさ x と面積 A を同時に考慮する必要あり
- ただし「密度 = 個体数 / 面積」といった割算値解析はやらない!
- `glm()` の `offset` 項わざでうまく対処できる
- ともあれその前に観測データを図にしてみる

R の data.frame: 面積 Area, 明るさ x, 個体数 y

```
> load("d2.RData")
> head(d, 8) # 先頭 8 行の表示
      Area   x y
1 0.017249 0.5 0
2 1.217732 0.3 1
3 0.208422 0.4 0
4 2.256265 0.1 0
5 0.794061 0.7 1
6 0.396763 0.1 1
7 1.428059 0.6 1
8 0.791420 0.3 1
```


明るさ vs 割算値 の図

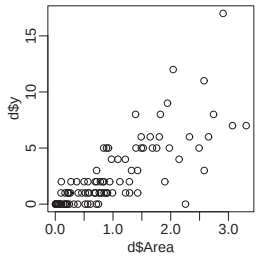
```
> plot(d$x, d$y / d$Area)
```



いまいちよくわからない ……

面積 A vs 個体数 y の図

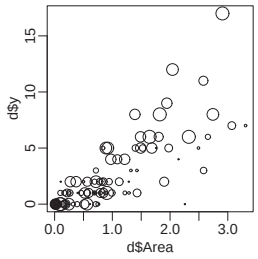
```
> plot(d$Area, d$y)
```



面積 A とともに区画内の個体数 y が増大するようだ

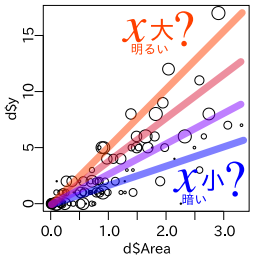
明るさ x の情報 (マルの大きさ) も図に追加

```
> plot(d$Area, d$y, cex = d$x * 2)
```



同じ面積でも明るいほど個体数が多い?

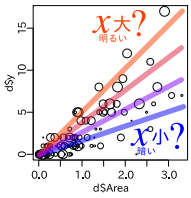
密度が明るさ x に依存する統計モデル



- 区画内の個体数 y の平均は面積 $\times$ 密度
- 密度は明るさ x で変化する

「平均個体数 = 面積 $\times$ 密度」モデル

1. ある区画 i の応答変数 y_i は平均 λ_i のポアソン分布にしたがうと仮定:
   $y_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda_i)$
2. 平均値 λ_i は面積 A_i に比例し, 密度は明るさ x_i に依存する

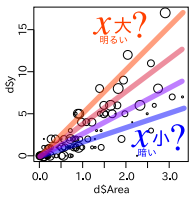


$$\lambda_i = A_i \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

つまり $\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i))$ となるので
$\log(\lambda_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i)$ 線形予測子は右辺のようになる

このとき $\log(A_i)$ を offset 項とよぶ (係数 β がない)

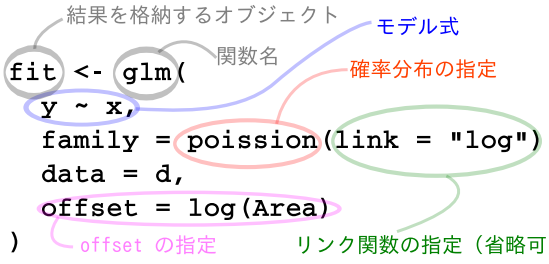
この問題は GLM であつかえる!



- `family`: `poisson`, ポアソン分布
- `link` 関数: `"log"`
- モデル式 : `y ~ x`
- `offset` 項の指定 : `log(Area)`

- 線形予測子 $z = \beta_1 + \beta_2$ `x` $+$ `log(Area)`
  a, b は推定すべきパラメーター
- 応答変数の平均値を λ とすると $\log(\lambda) = z$
  つまり $\lambda = \exp(z) = \exp(\beta_1 + \beta_2$ `x` $+$ `log(Area)`$)$
- 応答変数 は平均 λ のポアソン分布に従う:

glm() 関数の指定



R の glm() 関数による推定結果

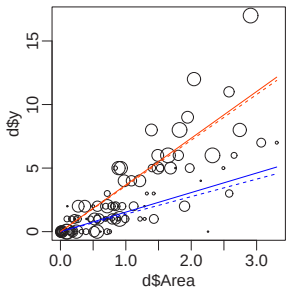
```
> fit <- glm(y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,
  offset = log(Area))
> print(summary(fit))

Call:
glm(formula = y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,
    offset = log(Area))

(... 略 ...)

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    0.321      0.160    2.01    0.044
x              1.090      0.227    4.80  1.6e-06
```


推定結果にもとづく予測を図にしてみる



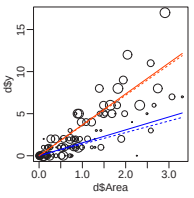
$x = 0.9$ light environment

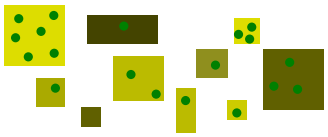
$x = 0.1$ dark environment

- 実線は glm() の推定結果にもとづく予測
- 破線はデータ生成時に指定した関係

まとめ: glm() の offset 項わざで「脱」割算

- 平均値が面積などに比例する場合は， この面積などを offset 項 として指定する
- 平均 = 面積 × 密度，というモデルの密度 を exp(線形予測子) として定式化する





統計モデルを工夫してわりざんやめよう

- 避けられる割算値
  - 確率

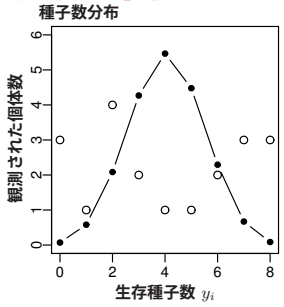
    例: N 個のうち y 個にある事象が発生する確率

    対策: ロジスティック回帰など二項分布モデルで
  - 密度などの指数

    例: 人口密度，specific leaf area (SLA) など

    対策: offset 項わざ — 統計モデリングの工夫!

次回予告 The next topic



N 個のうち y 個
…という形式のデータ
なのに
二項分布ではまったく
説明できない?

階層ベイズモデル
Hierarchical Bayesian Model (HBM)

予習:
階層ベイズモデルで使う
連続確率分布

A preview of continuous probability distributions to construct Hierarchical Bayesian Models

離散確率分布 ?
discrete probability distributions ?

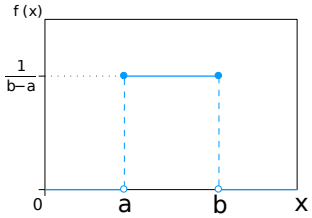
連続確率分布 ?
continuous probability distributions ?

離散確率分布 discrete probability distributions

Poisson distribution Binomial distribution

(連続) 一様分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

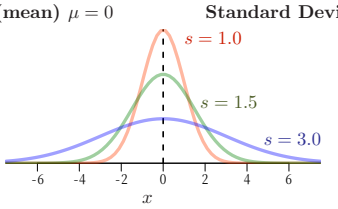
Uniform distribution (continuous) – an important "device" for HBM
parameter: min (a) and max (b)



正規分布あるいはガウス分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

the normal or Gaussian distribution – an important "device" for HBM
parameter: mean (μ) and SD ($s > 0$)

平均 (mean) $\mu = 0$ **Standard Deviation (SD)** s



$$p(x \mid s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$$