

# 統計モデリング入門 2018 (e)

GLM                      logistic regression  
一般化線形モデル: ロジスティック回帰

久保拓弥 [kubo@ees.hokudai.ac.jp](mailto:kubo@ees.hokudai.ac.jp)

北大環境科学院の講義 <http://goo.gl/76c4i>

2018-07-02

ファイル更新時刻: 2018-06-29 14:36

# 今日のハナシ I

## ① “ $N$ 個のうち $y$ 個が生きてる” タイプのデータ

count data or categorical data with upper bound

上限のあるカウントデータ

logistic regression

## ② ロジスティック回帰 の部品

二項分布 binomial distribution と logit link function

interaction term

## ③ ちょっとだけ 交互作用項 について

線形予測子の中の複雑な項 complicate terms in linear predictor

NEVER data ÷ data !

## ④ 何でも「割算」するな!

use GLM with offset term

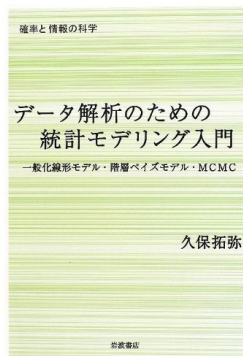
「脱」割算の offset 項わざ

# 今日の内容と「統計モデリング入門」との対応

<http://goo.gl/Ufq2>

今日はおもに「**第 6 章 GLM の応用**  
**範囲をひろげる**」の内容を説明し  
ます。

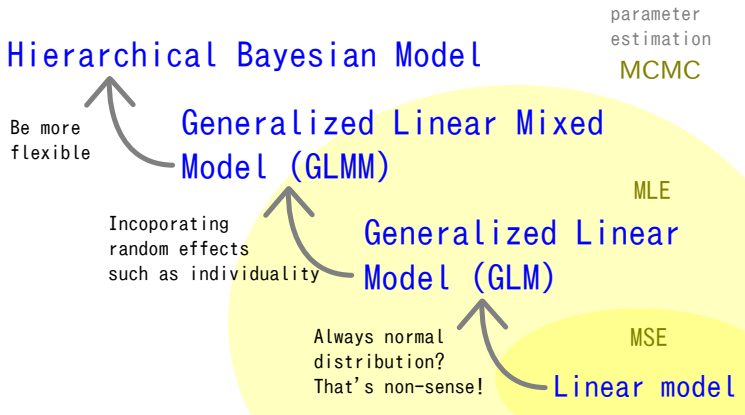
- 著者: 久保拓弥
- 出版社: 岩波書店
- 2012-05-18 刊行



# Understand the Evolution of Linear Models!

## この授業であつかう統計モデルたち

### The development of linear models



# 一般化線形モデルって何だろう？

Generalized Linear Model

## 一般化線形モデル (GLM)

- ポアソン回帰 (Poisson regression)
- **ロジスティック回帰 (logistic regression)**
- 直線回帰 (linear regression)
- .....

how to specify GLM

## 一般化線形モデルを作る

Generalized Linear Model

## 一般化線形モデル (GLM)

probability distribution

- 確率分布は?

linear predictor

- 線形予測子は?

link function

- リンク関数は?

# how to specify Poisson regression model, a GLM GLM のひとつであるポアソン回帰モデルを指定する

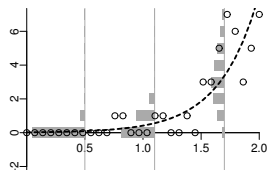
## ポアソン回帰のモデル

- probability distribution      Poisson distribution

● 確率分布 : **ポアソン分布**
- linear predictor

● 線形予測子: e.g.,  $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function                      log link function

● リンク関数: **対数リンク関数**



how to specify logistic regression model, a GLM  
 GLM のひとつである **logistic 回帰モデル**を指定する

## ロジスティック回帰のモデル

probability distribution      binomial distribution

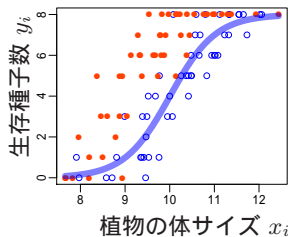
- 確率分布 : 二項分布

linear predictor

- 線形予測子: e.g.,  $\beta_1 + \beta_2 x_i$

link function

- リンク関数: **logit リンク関数**





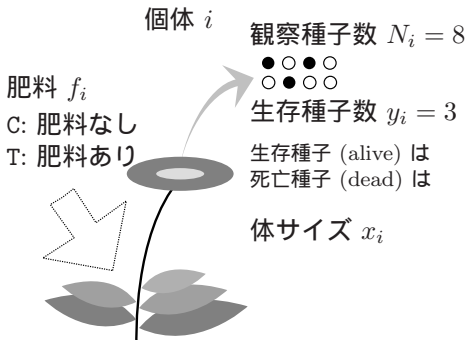
# 1. “ $N$ 個のうち $y$ 個が生きてる” タイプのデータ

count data or categorical data with upper bound  
上限のあるカウントデータ

$$y_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$$

# またいつもの例題? ..... ちょっとちがう

8 個の <sup>seeds</sup> 種子のうち  $y$  個が <sup>alive</sup> 発芽可能 だった! ..... というデータ



## Reading data file

データファイルを読みこむ 

data4a.csv は CSV (comma separated value) format file なので, R で読みこむには以下のようにする:

```
> d <- read.csv("data4a.csv")
```

or

```
> d <- read.csv(  
+ "http://hosho.ees.hokudai.ac.jp/~kubo/stat/2015/Fig/binomial/data4a.csv")
```

データは  $d$  と名付けられた data frame (「表」みたいなもの) に格納される

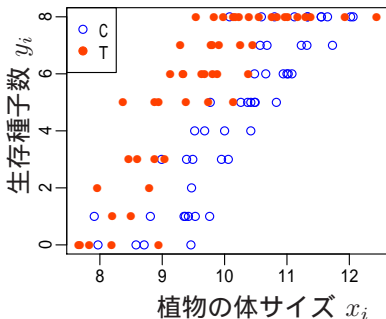
data frame  $d$  を調べる

```
> summary(d)
```

	N	y	x	f
Min.	:8	Min. :0.00	Min. : 7.660	C:50
1st Qu.:	:8	1st Qu.:3.00	1st Qu.: 9.338	T:50
Median	:8	Median :6.00	Median : 9.965	
Mean	:8	Mean :5.08	Mean : 9.967	
3rd Qu.:	:8	3rd Qu.:8.00	3rd Qu.:10.770	
Max.	:8	Max. :8.00	Max. :12.440	

# まずはデータを図にしてみる

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f])
> legend("topleft", legend = c("C", "T"), pch = c(21, 19))
```



fertilization      effective  
 今回は 施肥処理 がきいている?

logistic regression

## 2. ロジスティック回帰の部品

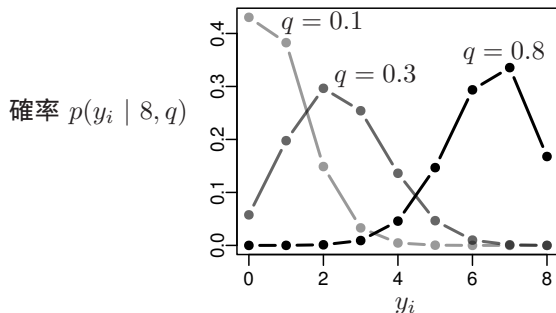
二項分布 binomial distribution と logit link function

## binomial distribution

二項分布 :  $N$  回のうち  $y$  回, となる確率

$$p(y | N, q) = \binom{N}{y} q^y (1 - q)^{N-y}$$

$\binom{N}{y}$  は「 $N$  個の観察種子の中から  $y$  個の生存種子を選びだす場合の数」



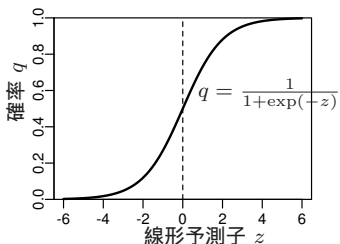
## logistic curve

## ロジスティック曲線 とはこういうもの

ロジスティック関数の関数形 (linear predictor  $z_i$ : 線形予測子, e.g.  $z_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$ )

$$q_i = \text{logistic}(z_i) = \frac{1}{1 + \exp(-z_i)}$$

- ```
> logistic <- function(z) 1 / (1 + exp(-z)) # 関数の定義
> z <- seq(-6, 6, 0.1)
> plot(z, logistic(z), type = "l")
```

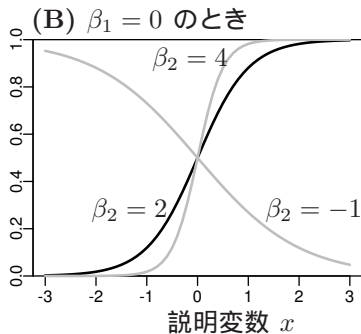
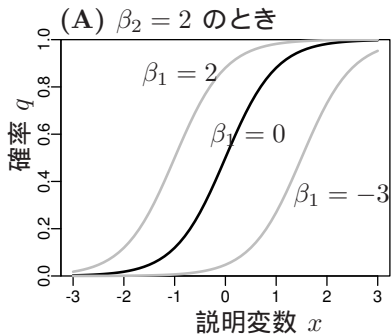




$\beta_1$  and  $\beta_2$  change logistic curve

## パラメーターが変化すると.....

黒い曲線は  $\{\beta_1, \beta_2\} = \{0, 2\}$  . (A)  $\beta_2 = 2$  と固定して  $\beta_1$  を変化させた場合 .  
 (B)  $\beta_1 = 0$  と固定して  $\beta_2$  を変化させた場合 .



パラメーター  $\{\beta_1, \beta_2\}$  や説明変数  $x$  がどんな値をとっても確率  $q$  は  $0 \leq q \leq 1$   
 となる便利な関数

# logit link function

- logistic 関数

$$q = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_1 + \beta_2 x))} = \text{logistic}(\beta_1 + \beta_2 x)$$

- logit 変換

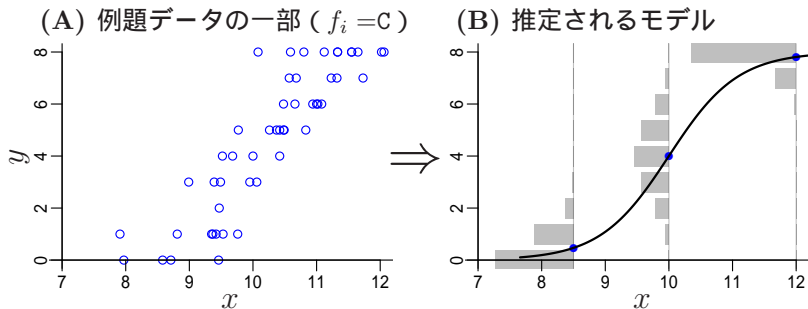
$$\text{logit}(q) = \log \frac{q}{1 - q} = \beta_1 + \beta_2 x$$

logit は logistic の逆関数 , logistic は logit の逆関数

logit is the inverse function of logistic function, vice versa

# logistic regression

## R でロジスティック回帰 — $\beta_1$ と $\beta_2$ の最尤推定

MLE for  $\beta_1$  and  $\beta_2$ 

```
> glm(cbind(y, N - y) ~ x + f, data = d, family = binomial)
```

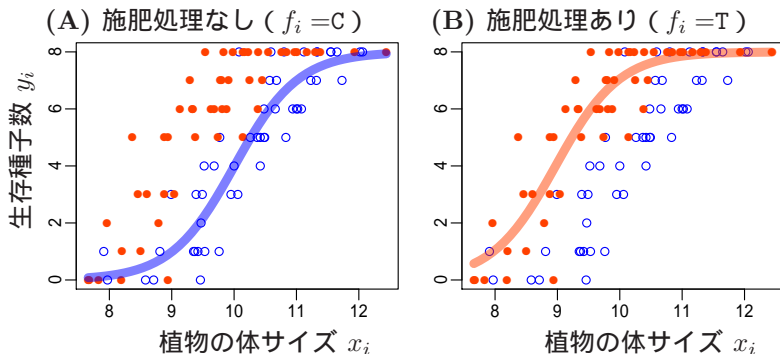
```
...
```

```
Coefficients:
```

| (Intercept) | x     | fT    |
|-------------|-------|-------|
| -19.536     | 1.952 | 2.022 |

## Fertilization effects

統計モデルの予測: 施肥処理によって応答が違う



### 3. ちょっとだけ interaction term 交互作用項 について

線形予測子の中の複雑な項 complicate terms in linear predictor

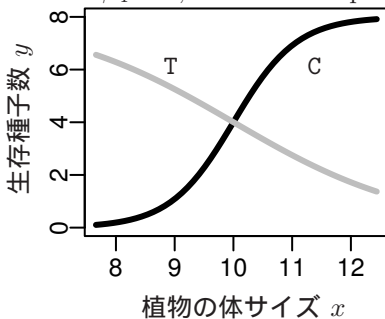
ロジスティック回帰を例に

interaction terms

# 交互作用項 とは何か?

$$\text{logit}(q) = \log \frac{q}{1-q} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 f + \beta_4 x f$$

... in case that  $\beta_4 < 0$ , sometimes it predicts ...



NEVER  $\text{data} \div \text{data}$  !

## 4. 何でも「割算」するな!

use GLM with offset term

「脱」割算の offset 頂わざ

ポアソン回帰を強めてみる

## Why you should avoid data ÷ data

## 割算値ひねくるデータ解析はなぜよくないのか?

- $\text{data} / \text{data}$  がどんな確率分布にしたがうのか見とおしが悪く，さらに説明要因との対応づけが難しくなる
- **情報が失われる**: 「10 打数 3 安打」と「200 打数 60 安打」，「どちらも 3 割バッター」と言ってよいのか?
- 割算値を使わないほうが見とおしのよい，合理的なデータ解析ができる (今回の授業の主題)
- したがって割算値を使ったデータ解析は不利な点ばかり，そんなことをする必要はどこにもない



## How to avoid data/data?

# 避けられるわりざん

avoidable data/data values

- 避けられる割算値

probability

- 確率

例:  $N$  個のうち  $y$  個にある事象が発生する確率

use statistical model with binomial distribution

対策: ロジスティック回帰など**二項分布モデル**で

indices such as densities

- 密度などの指数

例: 人口密度, specific leaf area (SLA) など

use offset term! described later

対策: **offset 項わざ** — このあと解説!

unfortunately, sometimes fractions appear ...

## 避けにくいわりざん

hard to avoid ...

- 避けにくい割算値

outputs from some measuring machines

- 測定機器が内部で割算した値を出力する場合

sometimes we have no choice but plot data/data values ...

- 割算値で作図せざるをえない場合があるかも

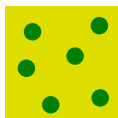
example population densities in research plots  
 offset 項の 例題 : 調査区画内の個体密度

light intensity index

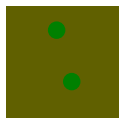
- 何か架空の植物個体の密度が「明るさ」 $x$  に応じて どう変わるかを知りたい

light index

- 明るさ は  $\{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$  の 10 段階で観測した



$x$ 大  
明るい

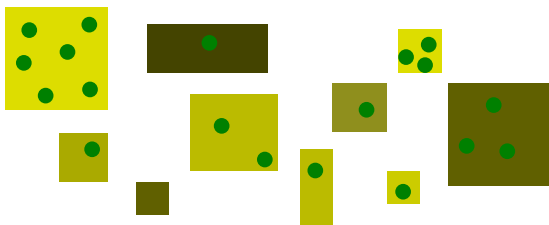


$x$ 小  
暗い

これだけなら単純に `glm(..., family = poisson)` とすればよいのだが .....

What? Differences in plot size?!

「場所によって調査区の面積を変えました」?!



- 明るさ  $x$  と面積  $A$  を同時に考慮する必要あり
- ただし「密度 = 個体数 / 面積」といった割算値解析はやらない!
- `glm()` の `offset` 項わざでうまく対処できる
- ともあれその前に観測データを図にしてみる

R の data.frame: 面積 Area, light index 明るさ x, number of plants 個体数 y

```
> load("d2.RData")
> head(d, 8) # 先頭 8 行の表示
```

|   | Area     | x   | y |
|---|----------|-----|---|
| 1 | 0.017249 | 0.5 | 0 |
| 2 | 1.217732 | 0.3 | 1 |
| 3 | 0.208422 | 0.4 | 0 |
| 4 | 2.256265 | 0.1 | 0 |
| 5 | 0.794061 | 0.7 | 1 |
| 6 | 0.396763 | 0.1 | 1 |
| 7 | 1.428059 | 0.6 | 1 |
| 8 | 0.791420 | 0.3 | 1 |

light index

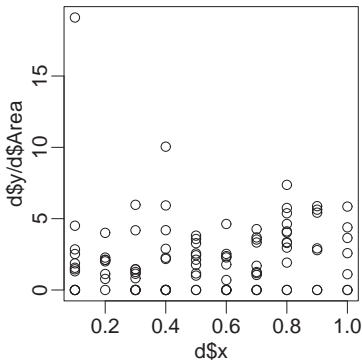
quotient or synthetic variable

明るさ vs

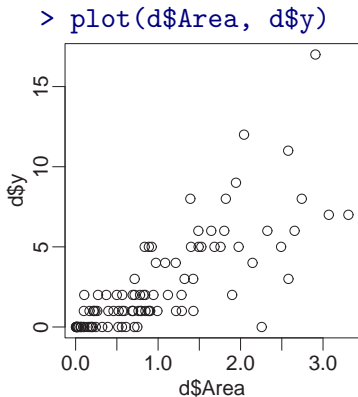
割算値

の図

```
> plot(d$x, d$y / d$Area)
```



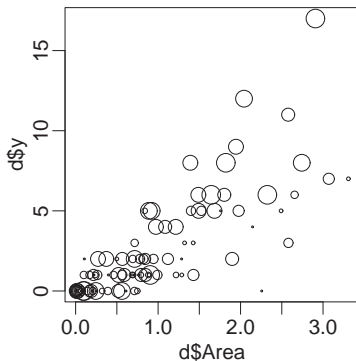
いまいちよくわからない

面積  $A$  vs 個体数  $y$  の図

面積  $A$  とともに区画内の個体数  $y$  が増大するようだ

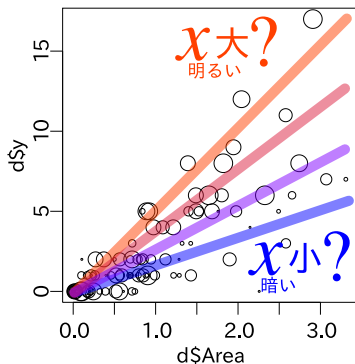
# 明るさ $x$ の情報 (マルの大きさ) も図に追加

```
> plot(d$Area, d$y, cex = d$x * 2)
```



同じ面積でも明るいほど個体数が多い?



密度が明るさ  $x$  に依存する統計モデル

- 区画内の個体数  $y$  の平均は面積  $\times$  密度
- 密度は明るさ  $x$  で変化する

# 「平均個体数 = 面積 × 密度」モデル

1. ある区画  $i$  の応答変数  $y_i$  は平均  $\lambda_i$  のポアソン分布にしたがうと仮定:

$$y_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$$

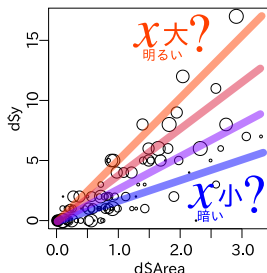
2. 平均値  $\lambda_i$  は面積  $A_i$  に比例し, 密度は明るさ  $x_i$  に依存する

$$\lambda_i = A_i \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

つまり  $\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i))$  となるので

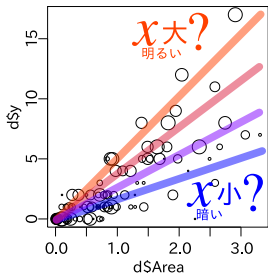
$\log(\lambda_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i)$  線形予測子は右辺のようになる

このとき  $\log(A_i)$  を offset 項とよぶ (係数  $\beta$  がない)



# この問題は GLM であつかえる!

- family: poisson, ポアソン分布
- link 関数: "log"
- モデル式:  $y \sim x$
- offset 項の指定:  $\log(\text{Area})$ 
  - 線形予測子  $z = \beta_1 + \beta_2 x + \log(\text{Area})$   
 $a, b$  は推定すべきパラメーター
  - 応答変数の平均値を  $\lambda$  とすると  $\log(\lambda) = z$   
 つまり  $\lambda = \exp(z) = \exp(\beta_1 + \beta_2 x + \log(\text{Area}))$
  - 応答変数 は平均  $\lambda$  のポアソン分布に従う:



## glm() 関数の指定

```
fit <- glm(  
  y ~ x,  
  family = poisson(link = "log")  
  data = d,  
  offset = log(Area)  
)
```

結果を格納するオブジェクト

関数名

モデル式

確率分布の指定

offset の指定

リンク関数の指定 (省略可)

## R の glm() 関数による推定結果

```
> fit <- glm(y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,  
  offset = log(Area))  
> print(summary(fit))
```

Call:

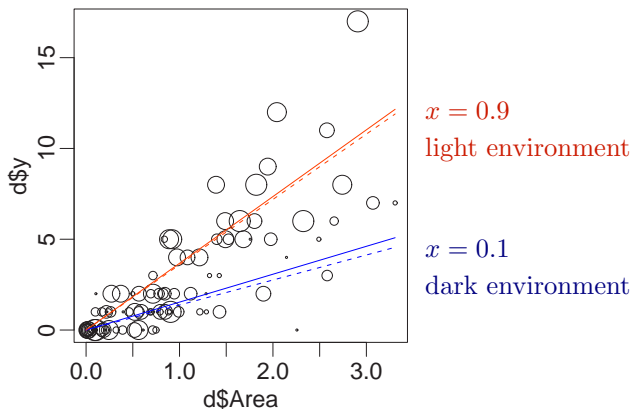
```
glm(formula = y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,  
  offset = log(Area))
```

(... 略...)

Coefficients:

|             | Estimate | Std. Error | z value | Pr(> z ) |
|-------------|----------|------------|---------|----------|
| (Intercept) | 0.321    | 0.160      | 2.01    | 0.044    |
| x           | 1.090    | 0.227      | 4.80    | 1.6e-06  |

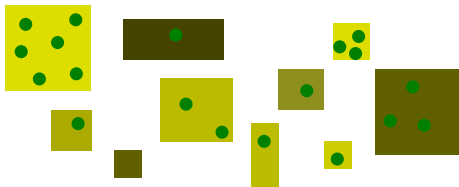
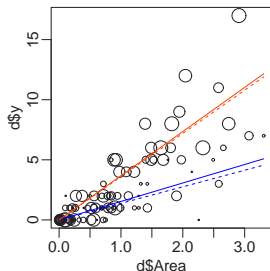
# Plotting the model prediction based on estimation 推定結果にもとづく予測を図にしてみる



- solid lines prediction
- 実線 は `glm()` の推定結果にもとづく 予測
- dotted lines “true” model
- 破線 は データ生成時に指定した関係

## まとめ: glm() の offset 項わざで「脱」割算

- 平均値が面積などに比例する場合は, この面積などを **offset 項** として指定する
- 平均 = 面積 × 密度, というモデルの**密度** を  $\exp(\text{線形予測子})$  として定式化する



Improve your statistical model and remove data/data values!

## 統計モデルを工夫してわりざんやめよう

avoidable data/data values

- 避けられる割算値

probability

- 確率

例:  $N$  個のうち  $y$  個にある事象が発生する確率

use statistical model with binomial distribution

対策: ロジスティック回帰など**二項分布モデル**で

indices such as densities

- 密度などの指数

例: 人口密度, specific leaf area (SLA) など

use offset term!

Improve your statistical model!

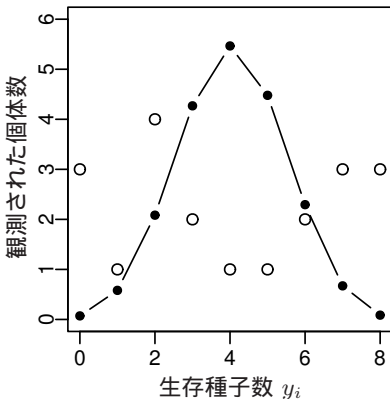
対策: **offset 項わざ** — 統計モデリングの工夫!



# 次回予告

The next topic

種子数分布



$N$  個のうち  $y$  個  
 ...という形式のデータ  
 なのに  
 二項分布ではまったく  
 説明できない?

## 階層ベイズモデル

Hierarchical Bayesian Model (HBM)

# 予習: 階層ベイズモデルで使う 連続確率分布

A preview of continuous  
probability  
distributions to construct  
Hierarchical Bayesian Models

## 離散確率分布 ?

discrete probability distributions ?

## 連続確率分布 ?

continuous probability  
distributions ?

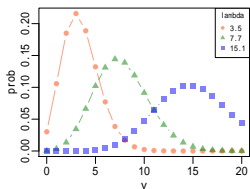
# 離散確率分布 discrete probability distributions

## Poisson distribution

データと確率分布の対応 probability distribution, the core of statistical model

 $\lambda$  changes the shape of distributionポアソン分布の  $\lambda$  を変えてみる

$$p(y | \lambda) = \frac{\lambda^y \exp(-\lambda)}{y!} \quad \lambda \text{ は平均をあらわすパラメーター}$$



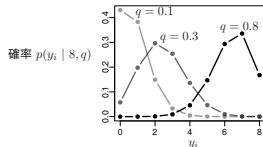
## Binomial distribution

ロジスティック回帰 の部分 二項分布 binomial distribution と logit link function

binomial distribution

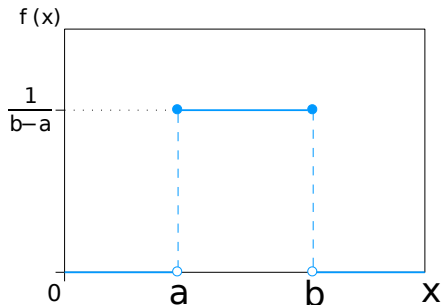
二項分布 :  $N$  回のうち  $y$  回, となる確率

$$p(y | N, q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}$$

 $\binom{N}{y}$  は「 $N$  個の観察種子の中から  $y$  個の生存種子を選びだす場合の数」

## (連続) 一様分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

Uniform distribution (continuous) – an important “device” for HBM  
parameter: min ( $a$ ) and max ( $b$ )

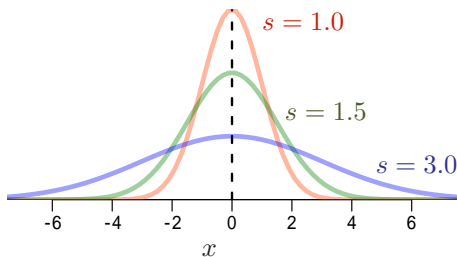


## 正規分布あるいはガウス分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

the normal or Gaussian distribution – an important “device” for HBM  
parameter: mean ( $\mu$ ) and SD ( $s > 0$ )

平均 (mean)  $\mu = 0$

Standard Deviation (SD)  $s$



$$p(x | s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$$