

**統計モデリング入門 2018 (e)**

GLM                      logistic regression  
一般化線形モデル: ロジスティック回帰

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp

北大環境科学院の講義 <http://goo.gl/76c4i>

2018-07-02

ファイル更新時刻: 2018-06-29 14:36

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>)      統計モデリング入門 2018 (e)      2018-07-02      1 / 46

もくじ

**今日のハナシ I**

- ① “ $N$  個のうち  $y$  個が生きてる” タイプのデータ  
count data or categorical data with upper bound  
上限のあるカウントデータ  
  
logistic regression
- ② ロジスティック回帰 の部品  
二項分布 binomial distribution と logit link function  
  
interaction term
- ③ ちょっとだけ 交互作用項 について  
線形予測子の中の複雑な項 complicate terms in linear predictor  
  
NEVER data ÷ data!
- ④ 何でも「割算」するな!  
use GLM with offset term  
「脱」割算の offset 頂わざ

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>)      統計モデリング入門 2018 (e)      2018-07-02      2 / 46


もくじ

**今日の内容と「統計モデリング入門」との対応**

<http://goo.gl/Ufq2>

今日はおもに「第 6 章 GLM の応用  
範囲をひろげる」の内容を説明し  
ます。

- 著者: 久保拓弥
- 出版社: 岩波書店
- 2012-05-18 刊行

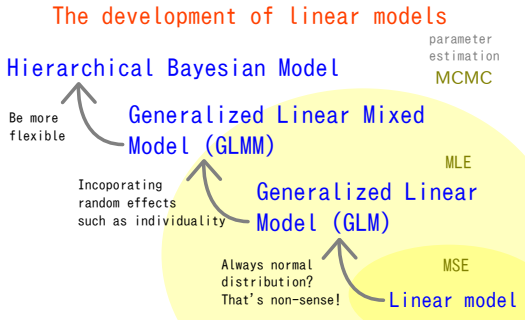


kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>)      統計モデリング入門 2018 (e)      2018-07-02      3 / 46

もくじ

**Understand the Evolution of Linear Models!  
この授業であつかう統計モデルたち**

The development of linear models



kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>)      統計モデリング入門 2018 (e)      2018-07-02      4 / 46

もくじ

**一般化線形モデルって何だろう?**

Generalized Linear Model

**一般化線形モデル (GLM)**

- ポアソン回帰 (Poisson regression)
- **ロジスティック回帰 (logistic regression)**
- 直線回帰 (linear regression)
- .....

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>)      統計モデリング入門 2018 (e)      2018-07-02      5 / 46

もくじ

**how to specify GLM  
一般化線形モデルを作る**

Generalized Linear Model

**一般化線形モデル (GLM)**

- probability distribution
- 確率分布は?
- linear predictor
- 線形予測子は?
- link function
- リンク関数は?

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>)      統計モデリング入門 2018 (e)      2018-07-02      6 / 46

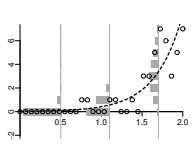
もくじ

how to specify Poisson regression model, a GLM  
GLM のひとつである **ポアソン回帰モデル** を指定する

---

**ポアソン回帰のモデル**

- 確率分布: probability distribution Poisson distribution **ポアソン分布**
- 線形予測子: linear predictor e.g.,  $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- リンク関数: link function log link function **対数リンク関数**



kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 7 / 46

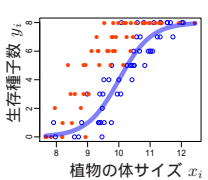
もくじ

how to specify logistic regression model, a GLM  
GLM のひとつである **logistic 回帰モデル** を指定する

---

**ロジスティック回帰のモデル**

- 確率分布: probability distribution binomial distribution **二項分布**
- 線形予測子: linear predictor e.g.,  $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- リンク関数: link function **logit リンク関数**



kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 8 / 46

"N 個のうち y 個が生きてる" タイプのデータ 上限のあるカウントデータ

---

1. "N 個のうち y 個が生きてる" タイプのデータ

count data or categorical data with upper bound  
上限のあるカウントデータ

$y_i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

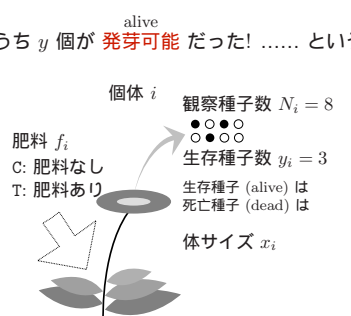
kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 9 / 46

"N 個のうち y 個が生きてる" タイプのデータ 上限のあるカウントデータ

---

またいつもの例題? ..... ちょっとちがう


8 個の種子のうち y 個が **発芽可能** だった! ..... というデータ



kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 10 / 46

"N 個のうち y 個が生きてる" タイプのデータ 上限のあるカウントデータ

---

Reading data file  
**データファイルを読みこむ** 

data4a.csv は CSV (comma separated value) format file なので, R で読みこむには以下のようにする:

```
> d <- read.csv("data4a.csv")
```

or

```
> d <- read.csv(
+ "http://hosho.ees.hokudai.ac.jp/~kubo/stat/2015/Fig/binomial/data4a.csv")
```

データは d と名付けられた data frame (「表」みたいなもの) に格納される

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 11 / 46

"N 個のうち y 個が生きてる" タイプのデータ 上限のあるカウントデータ

---

data frame d を調べる

```
> summary(d)
```

	N	y	x	f
Min.	:8	:0.00	: 7.660	C:50
1st Qu.:	:8	:3.00	1st Qu. : 9.338	T:50
Median :	:8	:6.00	Median : 9.965	
Mean :	:8	:5.08	Mean : 9.967	
3rd Qu.:	:8	:8.00	3rd Qu. :10.770	
Max. :	:8	:8.00	Max. :12.440	

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c4i>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 12 / 46

「N 個のうち y 個が生きてる」タイプのデータ 上層のあるカウントデータ

まずはデータを図にしてみる

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f])
> legend("topleft", legend = c("C", "T"), pch = c(21, 19))
```

生存種子数  $y_i$

植物の体サイズ  $x_i$

fertilization effective  
今回は 施肥処理 がきいている?

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 13 / 46

ロジスティック回帰 の部品 二項分布 binomial distribution と logit link function

logistic regression

## 2. ロジスティック回帰の部品

二項分布 binomial distribution と logit link function

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 14 / 46

ロジスティック回帰 の部品 二項分布 binomial distribution と logit link function

binomial distribution

二項分布 : N 回のうち y 回, となる確率

$$p(y | N, q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}$$

$\binom{N}{y}$  は「N 個の観察種子の中から y 個の生存種子を選ばずる場合の数」

確率  $p(y_i | 8, q)$

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 15 / 46

ロジスティック回帰 の部品 二項分布 binomial distribution と logit link function

logistic curve

ロジスティック曲線 とはこういうもの

ロジスティック関数の関数形 (linear predictor  $z_i$ : 線形予測子, e.g.  $z_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$ )

$$q_i = \text{logistic}(z_i) = \frac{1}{1 + \exp(-z_i)}$$

```
> logistic <- function(z) 1 / (1 + exp(-z)) # 関数の定義
> z <- seq(-6, 6, 0.1)
> plot(z, logistic(z), type = "l")
```

確率  $q$

線形予測子  $z$

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 16 / 46

ロジスティック回帰 の部品 二項分布 binomial distribution と logit link function

$\beta_1$  and  $\beta_2$  change logistic curve

パラメーターが変化すると.....

黒い曲線は  $\{\beta_1, \beta_2\} = \{0, 2\}$ . (A)  $\beta_2 = 2$  と固定して  $\beta_1$  を変化させた場合.  
(B)  $\beta_1 = 0$  と固定して  $\beta_2$  を変化させた場合.

確率  $q$

説明変数  $x$

パラメーター  $\{\beta_1, \beta_2\}$  や説明変数  $x$  がどんな値をとっても確率  $q$  は  $0 \leq q \leq 1$  となる便利な関数

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 17 / 46

ロジスティック回帰 の部品 二項分布 binomial distribution と logit link function

## logit link function

- logistic 関数
 
$$q = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_1 + \beta_2 x))} = \text{logistic}(\beta_1 + \beta_2 x)$$
- logit 変換
 
$$\text{logit}(q) = \log \frac{q}{1-q} = \beta_1 + \beta_2 x$$

logit は logistic の逆関数, logistic は logit の逆関数  
logit is the inverse function of logistic function, vice versa

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 18 / 46

ロジスティック回帰 の部前 二項分布 binomial distribution と logit link function

logistic regression MLE for  $\beta_1$  and  $\beta_2$   
**R** でロジスティック回帰 —  $\beta_1$  と  $\beta_2$  の最尤推定

(A) 例題データの一部 ( $f_i = C$ ) (B) 推定されるモデル

```
> glm(cbind(y, N - y) ~ x + f, data = d, family = binomial)
...
Coefficients:
(Intercept)          x          fT
    -19.536         1.952         2.022
```

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 19 / 46

ロジスティック回帰 の部前 二項分布 binomial distribution と logit link function

Fertilization effects  
 統計モデルの予測: 施肥処理によって応答が違う

(A) 施肥処理なし ( $f_i = C$ ) (B) 施肥処理あり ( $f_i = T$ )

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 20 / 46

ちょっとだけ 交互作用項 について predictor

interaction term

### 3. ちょっとだけ 交互作用項 について

線形予測子の中の複雑な項 complicate terms in linear predictor

ロジスティック回帰を例に

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 21 / 46

ちょっとだけ 交互作用項 について predictor

### interaction terms 交互作用項 とは何か?

$$\text{logit}(q) = \log \frac{q}{1-q} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 f + \beta_4 x f$$

... in case that  $\beta_4 < 0$ , sometimes it predicts ...

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 22 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### 4. 何でも「割算」するな!

use GLM with offset term  
 「脱」割算の offset 頂わざ

ポアソン回帰を強めてみる

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 23 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### Why you should avoid data ÷ data 割算値ひねくるデータ解析はなぜよくないのか?

- **data / data** がどんな確率分布にしたがうのか見とおしが悪く、さらに説明要因との対応づけが難しくなる
- **情報が失われる**: 「10 打数 3 安打」と「200 打数 60 安打」, 「どちらも 3 割バッター」と言ってよいのか?
- 割算値を使わないほうが見とおしのよい, **合理的なデータ解析**ができる (今回の授業の主題)
- したがって割算値を使ったデータ解析は不利な点ばかり, そんなことをする必要はどこにもない

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 24 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

How to avoid data/data?  
避けられるわりざん

avoidable data/data values

- 避けられる割算値
  - probability
    - 確率
    - 例:  $N$  個のうち  $y$  個にある事象が発生する確率
    - use statistical model with binomial distribution
    - 対策: ロジスティック回帰など二項分布モデルで
  - indices such as densities
    - 密度などの指数
    - 例: 人口密度, specific leaf area (SLA) など
    - use offset term! described later
    - 対策: offset 頂わざ — このあと解説!

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 25 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

unfortunately, sometimes fractions appear ...  
避けにくいわりざん

hard to avoid ...

- 避けにくい割算値
  - outputs from some measuring machines
    - 測定機器が内部で割算した値を出力する場合
  - sometimes we have no choice but plot data/data values ...
    - 割算値で作図せざるをえない場合があるかも

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 26 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ


example population densities in research plots  
offset 項の 例題: 調査区画内の個体密度

light intensity index

- 何か架空の植物個体の密度が「明るさ」 $x$  に応じて どう変わるかを知りたい
- 明るさ は  $\{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$  の 10 段階で観測した



$x$ 大  
明るい



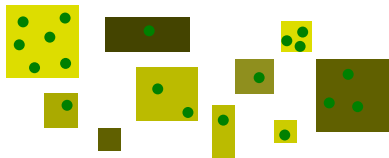
$x$ 小  
暗い

これだけなら単純に `glm(..., family = poisson)` とすればよいのだが

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 27 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

What? Differences in plot size?!  
「場所によって調査区の面積を変えました」?!



- 明るさ  $x$  と面積  $A$  を同時に考慮する必要あり
- ただし「密度 = 個体数 / 面積」といった割算値解析はやらない!
- `glm()` の offset 頂わざでうまく対処できる
- ともあれその前に観測データを図にしてみる

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 28 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

light index number of plants  
R の data.frame: 面積 Area, 明るさ  $x$ , 個体数  $y$

```

> load("d2.RData")
> head(d, 8) # 先頭 8 行の表示
  Area x y
1 0.017249 0.5 0
2 1.217732 0.3 1
3 0.208422 0.4 0
4 2.256265 0.1 0
5 0.794061 0.7 1
6 0.396763 0.1 1
7 1.428059 0.6 1
8 0.791420 0.3 1
    
```

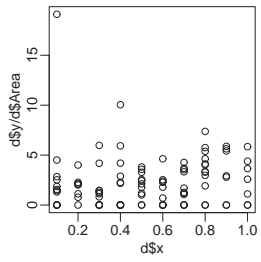
kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 29 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

light index quotient or synthetic variable  
明るさ vs 割算値 の図

```

> plot(d$x, d$y / d$Area)
    
```



いまいちよくわからない

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 30 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### 面積 $A$ vs 個体数 $y$ の図

```
> plot(d$Area, d$y)
```

面積  $A$  とともに区画内の個体数  $y$  が増大するようだ

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 31 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### 明るさ $x$ の情報 (マルの大きさ) も図に追加

```
> plot(d$Area, d$y, cex = d$x * 2)
```

同じ面積でも明るいほど個体数が多い?

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 32 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### 密度が明るさ $x$ に依存する統計モデル

- 区画内の個体数  $y$  の平均は面積  $\times$  密度
- 密度は明るさ  $x$  で変化する

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 33 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### 「平均個体数 = 面積 $\times$ 密度」モデル

- ある区画  $i$  の応答変数  $y_i$  は平均  $\lambda_i$  のポアソン分布にしたがうと仮定:  
 $y_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$
- 平均値  $\lambda_i$  は面積  $A_i$  に比例し、密度は明るさ  $x_i$  に依存する

$$\lambda_i = A_i \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

つまり  $\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i))$  となるので  
 $\log(\lambda_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i)$  線形予測子は右辺のようになる  
 このとき  $\log(A_i)$  を offset 項とよぶ (係数  $\beta$  が無い)

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 34 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### この問題は GLM であつかえる!

- family: poisson, ポアソン分布
- link 関数: "log"
- モデル式:  $y \sim x$
- offset 項の指定:  $\log(\text{Area})$

- 線形予測子  $z = \beta_1 + \beta_2 x + \log(\text{Area})$   
 $a, b$  は推定すべきパラメーター
- 応答変数の平均値を  $\lambda$  とすると  $\log(\lambda) = z$   
 つまり  $\lambda = \exp(z) = \exp(\beta_1 + \beta_2 x + \log(\text{Area}))$
- 応答変数 は平均  $\lambda$  のポアソン分布に従う:

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 35 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

### glm() 関数の指定

```
fit <- glm(
  y ~ x,
  family = poisson(link = "log"),
  data = d,
  offset = log(Area)
)
```

結果を格納するオブジェクト: fit  
 関数名: glm  
 モデル式: y ~ x  
 確率分布の指定: poisson  
 offset の指定: log(Area)  
 リンク関数の指定 (省略可): link = "log"

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 36 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 項わざ

### R の glm() 関数による推定結果

```
> fit <- glm(y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,
  offset = log(Area))
> print(summary(fit))
```

Call:  
glm(formula = y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d, offset = log(Area))

(... 略...)

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )
(Intercept)	0.321	0.160	2.01	0.044
x	1.090	0.227	4.80	1.6e-06

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 37 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 項わざ

### Plotting the model prediction based on estimation 推定結果にもとづく予測を図にしてみる

The plot shows a scatter of data points (circles) representing the relationship between d\$Area (x-axis, 0.0 to 3.0) and d\$y (y-axis, 0 to 15). Two prediction lines are shown: a red dashed line for a light environment (x = 0.9) and a blue dashed line for a dark environment (x = 0.1). Solid lines represent the glm() model fit, while dotted lines represent the 'true' model. A legend indicates that solid lines are the glm() results, dotted lines are the 'true' model, and dashed lines are the specified relationships at the time of data generation.

prediction

- 実線 は glm() の推定結果にもとづく 予測
- 点線 は "true" model
- 破線 は データ生成時に指定した関係

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 38 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 項わざ

### まとめ: glm() の offset 項わざで「脱」割算

- 平均値が面積などに比例する場合は、この面積などを **offset 項** として指定する
- 平均 = 面積 × 密度、というモデルの密度を exp(線形予測子) として定式化する

The diagram illustrates the concept of area and density. It shows several green squares of different sizes and shades of green, representing different areas and densities. A small scatter plot in the top right corner shows the relationship between d\$Area and d\$y, with a red dashed line for light environment and a blue dashed line for dark environment.

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 39 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 項わざ

### Improve your statistical model and remove data/data values! 統計モデルを工夫してわりざんやめよう

avoidable data/data values

- **避けられる割算値**
  - probability
    - 確率
 

例:  $N$  個のうち  $y$  個にある事象が発生する確率

use statistical model with binomial distribution  
対策: ロジスティック回帰など**二項分布モデル**で
    - indices such as densities
      - 密度などの指数
 

例: 人口密度, specific leaf area (SLA) など

use offset term! Improve your statistical model!  
対策: **offset 項わざ** — 統計モデリングの工夫!

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 40 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 項わざ

### 次回予告 The next topic

種子数分布

The graph shows the distribution of survival seed count  $y_i$  (x-axis, 0 to 8) and the number of observed individuals (y-axis, 0 to 6). The data points are connected by a line, showing a peak at  $y_i = 4$ . The text notes that while the data is in the form of  $N$  out of  $y$ , it cannot be fully explained by a binomial distribution.

$N$  個のうち  $y$  個 という形式のデータなのに 二項分布ではまったく説明できない!

### 階層ベイズモデル Hierarchical Bayesian Model (HBM)

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 41 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 項わざ

### 予習:

## 階層ベイズモデルで使う 連続確率分布

### A preview of continuous probability distributions to construct Hierarchical Bayesian Models

kubostat2018e (http://goo.gl/76c4i) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 42 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

# 離散確率分布 ?

## discrete probability distributions ?

# 連続確率分布 ?

## continuous probability distributions ?

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c41>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 43 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

## 離散確率分布 discrete probability distributions

### Poisson distribution

ポアソン分布の  $\lambda$  を変えてみる

$p(y | \lambda) = \frac{\lambda^y \exp(-\lambda)}{y!}$   $\lambda$  は平均をあらわすパラメーター

### Binomial distribution

二項分布 :  $N$  回のうち  $y$  回, とする確率

$p(y | N, q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}$

$\binom{N}{y}$  は ' $N$  個の観察種子の中から  $y$  個の生存種子を選びだす場合の数'

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c41>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 44 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

## (連続) 一様分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

Uniform distribution (continuous) – an important “device” for HBM  
parameter: min ( $a$ ) and max ( $b$ )

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c41>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 45 / 46

何でも「割算」するな! 「脱」割算の offset 頂わざ

## 正規分布あるいはガウス分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

the normal or Gaussian distribution – an important “device” for HBM  
parameter: mean ( $\mu$ ) and SD ( $s > 0$ )

平均 (mean)  $\mu = 0$       Standard Deviation (SD)  $s$

$$p(x | s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$$

kubostat2018e (<http://goo.gl/76c41>) 統計モデリング入門 2018 (e) 2018-07-02 46 / 46