# 統計モデリング入門 2017 (e)

## GLM logistic regression
## 一般化線形モデル: ロジスティック回帰

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp

京大霊長研の講義 https://goo.gl/z9yCJY

2017–11–14

ファイル更新時刻: 2017–11–11 16:02

# 今日のハナシ I

1. “$N$ 個のうち $y$ 個が生きてる” タイプのデータ
   count data or categorical data with upper bound
   上限のあるカウントデータ

   logistic regression
2. ロジスティック回帰 の部品

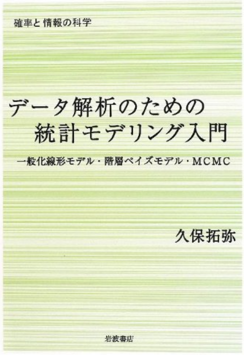
   二項分布 binomial distribution と logit link function

   interaction term
3. ちょっとだけ　交互作用項　について
   complicate terms in linear predictor
   線形予測子の中の複雑な項

   NEVER data ÷ data !
4. 何でも「割算」するな!
   use GLM with offset term
   「脱」割算の offset 項わざ

# 今日の内容と「統計モデリング入門」との対応

http://goo.gl/Ufq2




**今日はおもに「第 6 章 GLM の応用範囲をひろげる」の内容を説明します．**

- **著者**: **久保拓弥**
- **出版社**: **岩波書店**
- 2012–05–18 **刊行**

statistaical models appeared in the class

# この授業であつかう統計モデルたち

## The development of linear models

parameter estimation

MCMC

Hierarchical Bayesian Model

Be more flexible

Generalized Linear Mixed Model (GLMM)

MLE

Incoporating random effects such as individuality

Generalized Linear Model (GLM)

Always normal distribution? That's non-sense!

MSE

Linear model

Kubo Doctrine: "Learn the evolution of linear-model family, firstly!"

# 一般化線形モデルって何だろう?

Generalized Linear Model

## 一般化線形モデル (GLM)

- ポアソン回帰 (Poisson regression)
- **ロジスティック回帰 (logistic regression)**
- 直線回帰 (linear regression)
- ……

## how to specify GLM<br>一般化線形モデルを作る

Generalized Linear Model
# 一般化線形モデル (GLM)

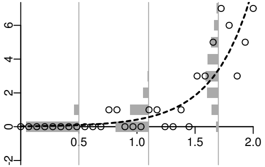
- probability distribution<br>**確率分布は?**
- linear predictor<br>**線形予測子は?**
- link function<br>**リンク関数は?**

how to specify Poisson regression model, a GLM

# GLM のひとつであるポアソン回帰モデルを指定する

## ポアソン回帰のモデル

- probability distribution 確率分布 : Poisson distribution ポアソン分布
- linear predictor 線形予測子: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function リンク関数: log link function 対数リンク関数

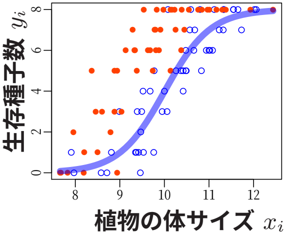


how to specify logistic regression model, a GLM

# GLM のひとつである logistic 回帰モデルを指定する

## ロジスティック回帰のモデル

- probability distribution
  **確率分布**： binomial distribution **二項分布**
- linear predictor
  **線形予測子**: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function
  **リンク関数**: logit **リンク関数**



# 1. “$N$ 個のうち $y$ 個が生きてる” タイプのデータ

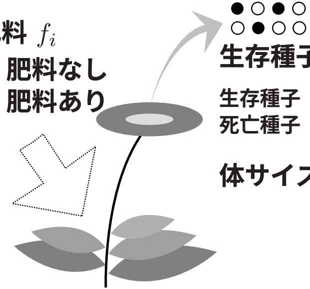
count data or categorical data with upper bound

**上限のあるカウントデータ**

$$y_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 8\}$$

# またいつもの例題? …… ちょっとちがう

8 個の 種子(seeds) のうち $y$ 個が **発芽可能**(alive) だった! …… というデータ



# Reading data file
# データファイルを読みこむ R

data4a.csv は CSV (comma separated value) format file なので，R で読みこむには以下のようにする:

```
> d <- read.csv("data4a.csv")
```

or

```
> d <- read.csv(
+ "http://hosho.ees.hokudai.ac.jp/~kubo/stat/2015/Fig/binomial/data4a.csv")
```

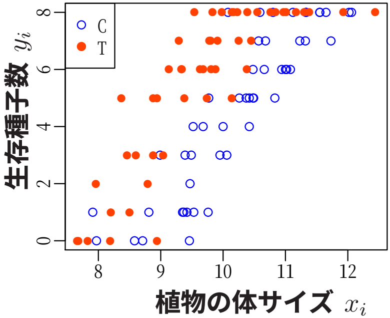
**データは d と名付けられた data frame (「表」みたいなもの) に格納される**

# data frame d を調べる

```
> summary(d)
       N            y               x            f
 Min.   :8   Min.   :0.00   Min.   : 7.660   C:50
 1st Qu.:8   1st Qu.:3.00   1st Qu.: 9.338   T:50
 Median :8   Median :6.00   Median : 9.965
 Mean   :8   Mean   :5.08   Mean   : 9.967
 3rd Qu.:8   3rd Qu.:8.00   3rd Qu.:10.770
 Max.   :8   Max.   :8.00   Max.   :12.440
```

# まずはデータを図にしてみる

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f])
> legend("topleft", legend = c("C", "T"), pch = c(21, 19))
```




今回は 施肥処理 (fertilization) が きいている (effective)?

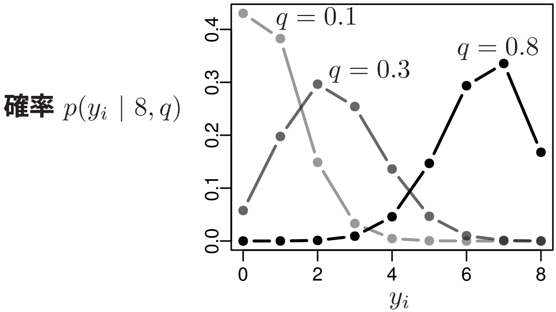
logistic regression
# 2. ロジスティック回帰 の部品

## 二項分布 binomial distribution と logit link function

## binomial distribution
# 二項分布　: $N$ 回のうち $y$ 回，となる確率

$$p(y \mid N, q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}$$

$\binom{N}{y}$ は「$N$ 個の観察種子の中から $y$ 個の生存種子を選びだす場合の数」



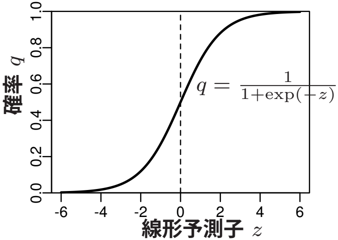
logistic curve

# ロジスティック曲線とはこういうもの

**ロジスティック関数の関数形** ($z_i$: linear predictor **線形予測子**, e.g. $z_i = \beta_1 + \beta_2 x_i$)

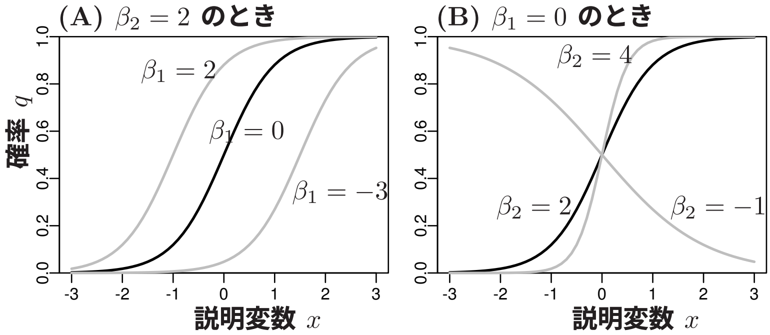
$$q_i = \mathrm{logistic}(z_i) = \frac{1}{1 + \exp(-z_i)}$$

```
> logistic <- function(z) 1 / (1 + exp(-z)) # 関数の定義
> z <- seq(-6, 6, 0.1)
> plot(z, logistic(z), type = "l")
```



## $\beta_1$ and $\beta_2$ change logistic curve
# パラメーターが変化すると……

**黒い曲線は** $\{\beta_1, \beta_2\} = \{0, 2\}$. (A) $\beta_2 = 2$ **と固定して** $\beta_1$ **を変化させた場合.** (B) $\beta_1 = 0$ **と固定して** $\beta_2$ **を変化させた場合.**




**パラメーター** $\{\beta_1, \beta_2\}$ **や説明変数** $x$ **がどんな値をとっても確率** $q$ **は** $0 \leq q \leq 1$ **となる便利な関数**

# logit link function

- logistic 関数

$$q = \frac{1}{1 + \exp(-(\beta_1 + \beta_2 x))} = \text{logistic}(\beta_1 + \beta_2 x)$$

- logit 変換

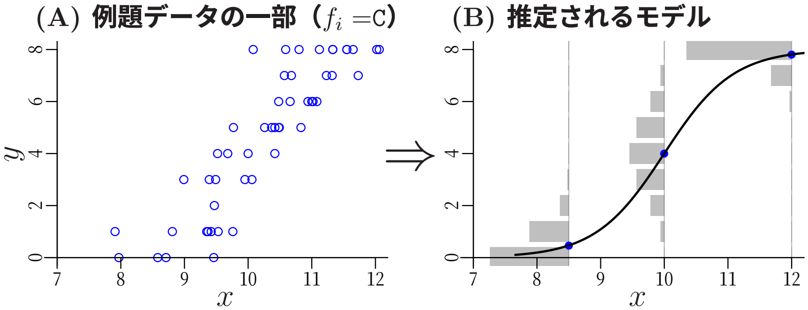
$$\text{logit}(q) = \log \frac{q}{1 - q} = \beta_1 + \beta_2 x$$

logit は logistic の逆関数，logistic は logit の逆関数

logit is the inverse function of logistic function, vice versa

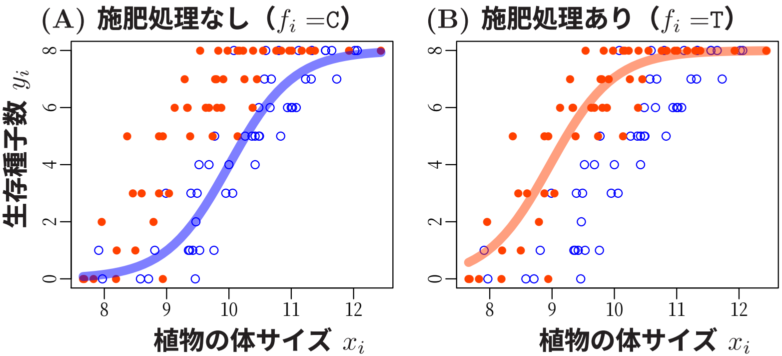
# R でロジスティック回帰 — $\beta_1$ と $\beta_2$ の最尤推定

logistic regression　MLE for $\beta_1$ and $\beta_2$




```
> glm(cbind(y, N - y) ~ x + f, data = d, family = binomial)
...
Coefficients:
(Intercept)            x           fT
    -19.536        1.952        2.022
```

# 統計モデルの予測: 施肥処理によって応答が違う



# 3. ちょっとだけ 交互作用項 について

interaction term

## 線形予測子の中の複雑な項

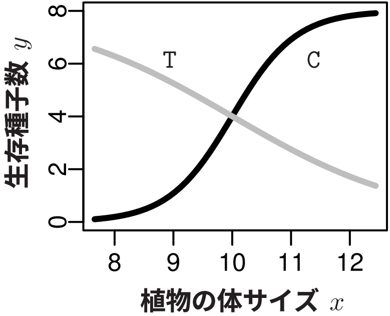
complicate terms in linear predictor

### ロジスティック回帰を例に

# 交互作用項とは何か?

$$\mathrm{logit}(q) = \log \frac{q}{1-q} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 f + \beta_4 x f$$

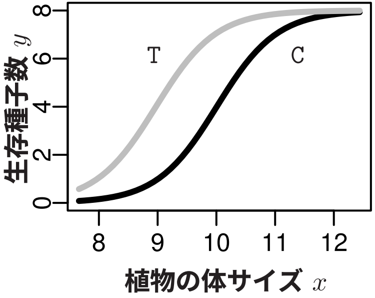
... in case that $\beta_4 < 0$, sometimes it predicts ...

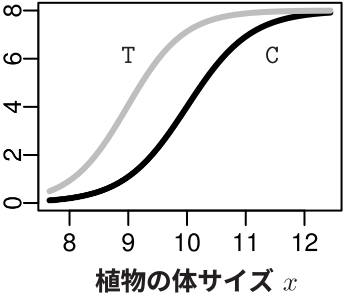


# in today's example no interaction effect
# この例題データの場合，交互作用はない

^^I glm(y ~ x + f, ...) glm(y ~ x + f + x:f, ...)

(A) 交互作用のないモデル (B) 交互作用のあるモデル




little difference
**差がほとんどない**

NEVER data ÷ data !

# 4. 何でも「割算」するな!

use GLM with offset term

## 「脱」割算の offset 項わざ

**ポアソン回帰を強めてみる**

## 割算値ひねくるデータ解析はなぜよくないのか?

- **観測値 / 観測値** がどんな確率分布にしたがうのか見とおしが悪く，さらに説明要因との対応づけが難しくなる
- **情報が失われる**: 「10 打数 3 安打」 と「200 打数 60 安打」，「どちらも 3 割バッター」と言ってよいのか?
- 割算値を使わないほうが見とおしのよい，**合理的なデータ解析**ができる (今回の授業の主題)
- したがって割算値を使ったデータ解析は不利な点ばかり，そんなことをする必要性はどこにもない

## How to avoid data/data?
# 避けられるわりざん

- avoidable data/data values
  **避けられる割算値**
  - probability
    **確率**

    **例**: $N$ 個のうち $y$ 個にある事象が発生する確率

    use statistical model with binomial distribution
    **対策**: ロジスティック回帰など**二項分布モデル**で
  - indices such as densities
    **密度などの指数**

    **例**: 人口密度，specific leaf area (SLA) など

    use offset term! — described later
    **対策**: **offset 項わざ** — このあと解説!

## unfortunately, sometimes fractions appear ...
## 避けにくいわりざん

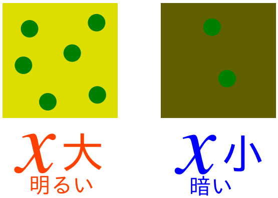
hard to avoid ...

- **避けにくい割算値**
  - outputs from some measuring machines
    **測定機器が内部で割算した値を出力する場合**
  - sometimes we have no choice but plot data/data values ...
    **割算値で作図せざるをえない場合があるかも**

## offset 項の例題：調査区画内の個体密度

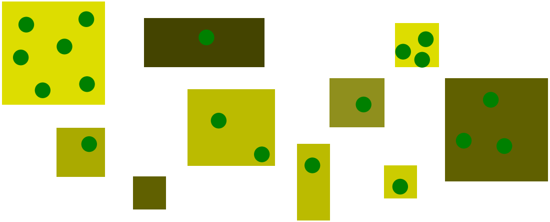
example　population densities in research plots

- 何か架空の植物個体の密度が「明るさ」$x$ に応じて どう変わるかを知りたい (light intensity index)
- 明るさ (light index) は $\{0.1, 0.2, \cdots, 1.0\}$ の 10 段階で観測した




これだけなら単純に `glm(..., family = poisson)` とすればよいのだが ……

## What? Differences in plot size?!
## 「場所によって調査区の面積を変えました」?!



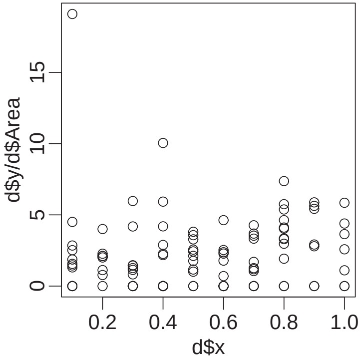
- 明るさ $x$ と面積 $A$ を同時に考慮する必要あり
- ただし「密度 $=$ 個体数 $/$ 面積」といった割算値解析はやらない!
- `glm()` の `offset` 項わざでうまく対処できる
- ともあれその前に観測データを図にしてみる

## R の data.frame: 面積 Area, 明るさ (light index) x, 個体数 (number of plants) y

```
> load("d2.RData")
> head(d, 8) # 先頭 8 行の表示
      Area   x y
1 0.017249 0.5 0
2 1.217732 0.3 1
3 0.208422 0.4 0
4 2.256265 0.1 0
5 0.794061 0.7 1
6 0.396763 0.1 1
7 1.428059 0.6 1
8 0.791420 0.3 1
```

# 明るさ vs 割算値図の図

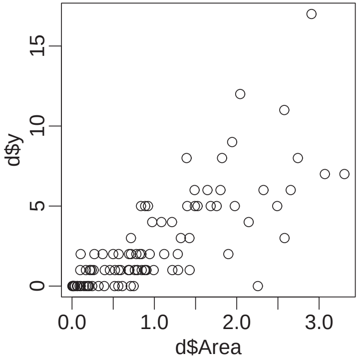
```
> plot(d$x, d$y / d$Area)
```




**いまいちよくわからない ……**

# 面積 $A$ vs 個体数 $y$ の図

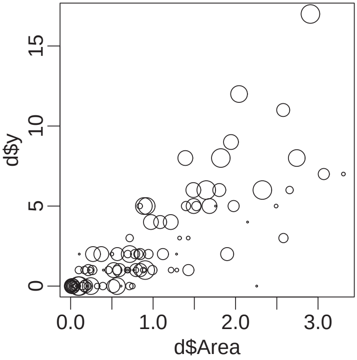
```
> plot(d$Area, d$y)
```




**面積 $A$ とともに区画内の個体数 $y$ が増大するようだ**

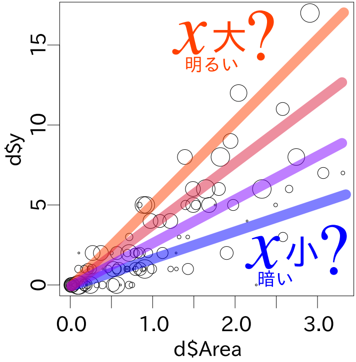
# 明るさ $x$ の情報 (マルの大きさ) も図に追加

```
> plot(d$Area, d$y, cex = d$x * 2)
```




**同じ面積でも明るいほど個体数が多い?**

# 密度が明るさ $x$ に依存する統計モデル



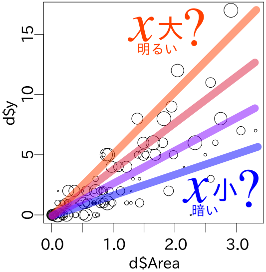

- **区画内の個体数 $y$ の平均は面積 $\times$ 密度**
- **密度は明るさ $x$ で変化する**

# 「平均個体数 = 面積 × 密度」モデル

1. **ある区画 $i$ の応答変数 $y_i$ は平均 $\lambda_i$ のポアソン分布にしたがうと仮定:**

$$y_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$$

2. **平均値 $\lambda_i$ は面積 $A_i$ に比例し，密度は明るさ $x_i$ に依存する**



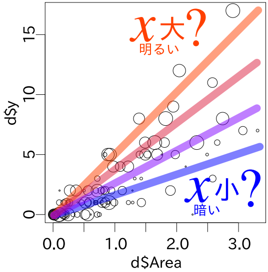

$$\lambda_i = A_i \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

**つまり** $\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i))$ **となるので**
$\log(\lambda_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \log(A_i)$ **線形予測子は右辺のようになる**

**このとき $\log(A_i)$ を offset 項とよぶ (係数 $\beta$ がない)**

# この問題は GLM であつかえる!

- `family`: `poisson`, **ポアソン分布**
- `link` **関数**: `"log"`
- **モデル式** : `y ~ x`
- `offset` **項の指定** : `log(Area)`




- ○ **線形予測子** $z = \beta_1 + \beta_2$ x + `log(Area)`

  $a, b$ **は推定すべきパラメーター**
- ○ **応答変数の平均値を** $\lambda$ **とすると** $\log(\lambda) = z$

  **つまり** $\lambda = \exp(z) = \exp(\beta_1 + \beta_2$ x + `log(Area)`$)$
- ○ **応答変数 は平均** $\lambda$ **のポアソン分布に従う**:

# glm() 関数の指定

結果を格納するオブジェクト

モデル式

関数名

確率分布の指定

```
fit <- glm(
  y ~ x,
  family = poission(link = "log")
  data = d,
  offset = log(Area)
)
```

offset の指定

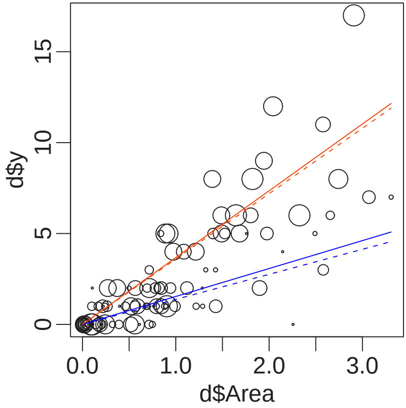
リンク関数の指定（省略可）

# R の glm() 関数による推定結果

```
> fit <- glm(y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,
  offset = log(Area))
> print(summary(fit))

Call:
glm(formula = y ~ x, family = poisson(link = "log"), data = d,
    offset = log(Area))

(...略...)

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    0.321      0.160    2.01    0.044
x              1.090      0.227    4.80  1.6e-06
```

Plotting the model prediction based on estimation

# 推定結果にもとづく予測を図にしてみる



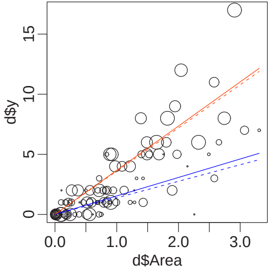

$x = 0.9$
light environment

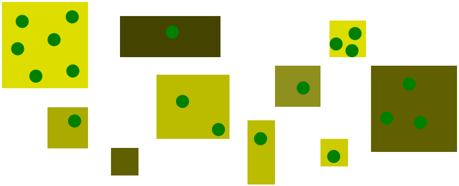
$x = 0.1$
dark environment

- solid lines / **実線** は glm() の推定結果にもとづく prediction / **予測**
- dotted lines / **破線** は “true” model / データ生成時に指定した関係

# まとめ: glm() の offset 項わざで「脱」割算

- **平均値が面積などに比例する場合は，この面積などを offset 項 として指定する**
- **平均 $=$ 面積 $\times$ 密度，というモデルの密度 を $\exp$(線形予測子) として定式化する**



Improve your statisitcal model and remove data/data values!

# 統計モデルを工夫してわりざんやめよう

- avoidable data/data values
  **避けられる割算値**
  - probability
    **確率**

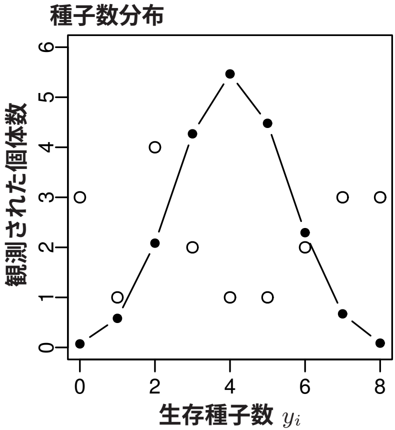
    **例**: $N$ 個のうち $y$ 個にある事象が発生する確率

    use statistical model with binomial distribution
    **対策**: ロジスティック回帰など**二項分布モデル**で
  - indices such as densities
    **密度などの指数**

    **例**: 人口密度，specific leaf area (SLA) など

    use offset term! — Improve your statistical model!
    **対策**: **offset 項わざ** — 統計モデリングの工夫!

# 次回予告 The next topic




$N$ 個のうち $y$ 個

…という形式のデータ

なのに

二項分布ではまったく

**説明できない?**

# 階層ベイズモデル

Hierarchical Bayesian Model (HBM)

# 予習:
# 階層ベイズモデルで使う
# 連続確率分布

# A preview of continuous probability distributions to construct Hierarchical Bayesian Models

# 離散確率分布？

discrete probability distributions ?

# 連続確率分布？

continuous probability distributions ?

# 離散確率分布 discrete probability distributions

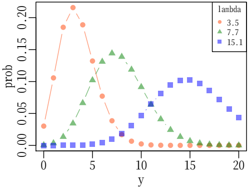
## Poisson distribution



λ changes the shape of distribution
### ポアソン分布の $\lambda$ を変えてみる

$$p(y \mid \lambda) = \frac{\lambda^y \exp(-\lambda)}{y!}$$

$\lambda$ は 平均 (mean) をあらわすパラメーター






## Binomial distribution

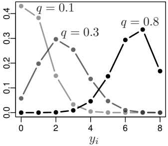


binomial distribution
### 二項分布 : $N$ 回のうち $y$ 回，となる確率

$$p(y \mid N, q) = \binom{N}{y} q^y (1-q)^{N-y}$$

$\binom{N}{y}$ は「$N$ 個の観察種子の中から $y$ 個の生存種子を選びだす場合の数」

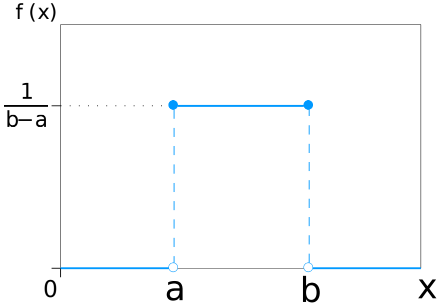
確率 $p(y_i \mid 8, q)$



# (連続) 一様分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

Uniform distribution (continuous) – an important “device” for HBM

parameter: min ($a$) and max ($b$)

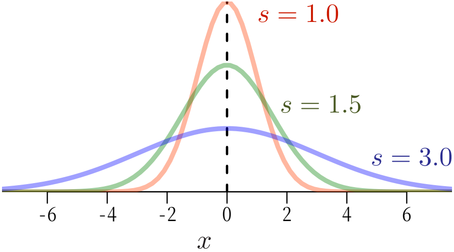


# 正規分布あるいはガウス分布 – 階層ベイズモデルの重要な部品

the normal or Gaussian distribution – an important “device” for HBM

parameter: mean ($\mu$) and SD ($s > 0$)

**平均 (mean)** $\mu = 0$ **Standard Deviation (SD)** $s$




$$p(x \mid s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$$