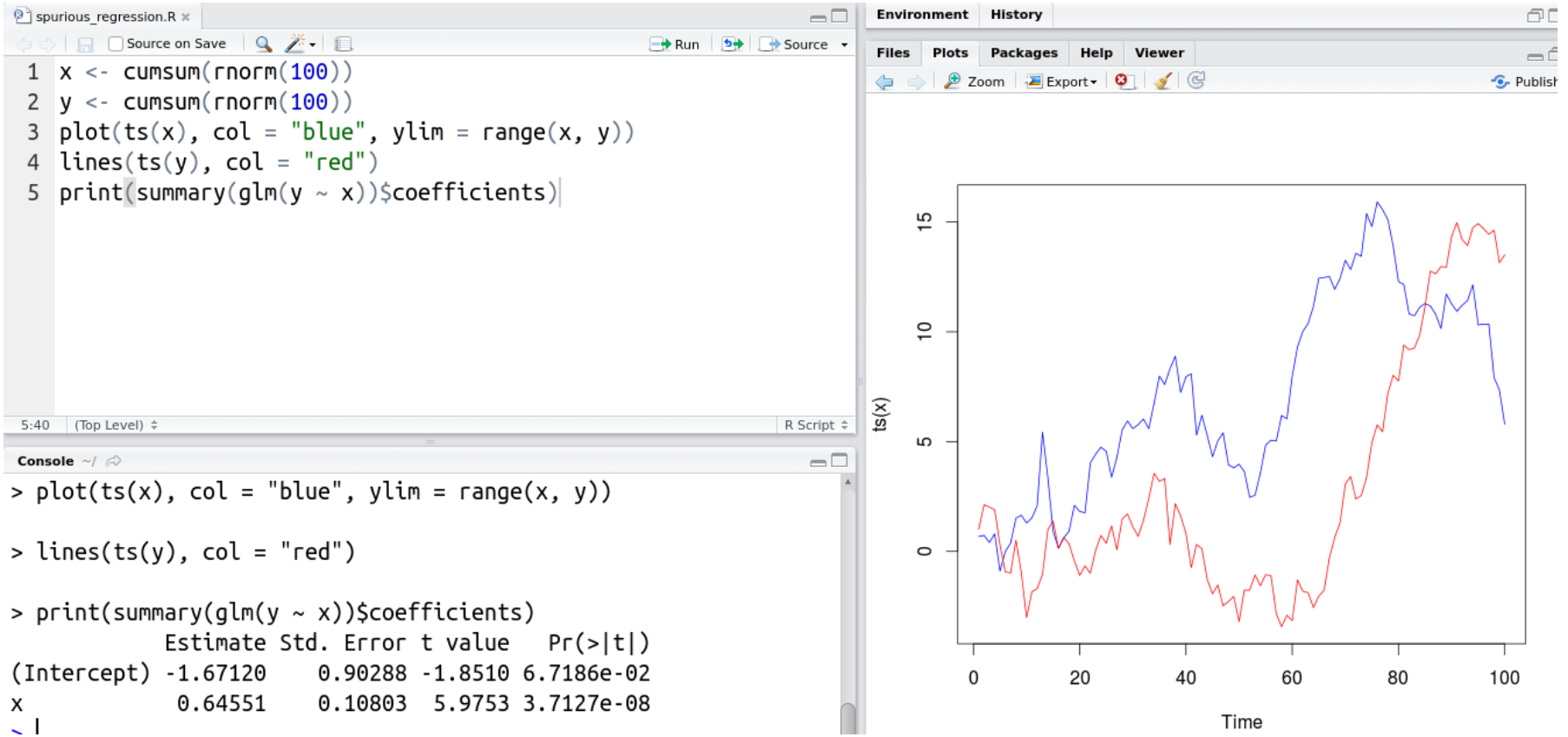
時系列データ解析

状態空間モデル（SSM）の続きと疑わしい回帰（spurious regression）

久保拓弥（北海道大・環境科学）



今回，説明してみたいこと

- 時系列データ:単純な回帰はダメ(続)
- 状態空間モデル: 乱歩と雑音の分離
- 欠測と不等間隔
- 時系列「ばらばら解析」やめよう
- 「うたがわしい回帰」への対策

階層ベイズモデル!

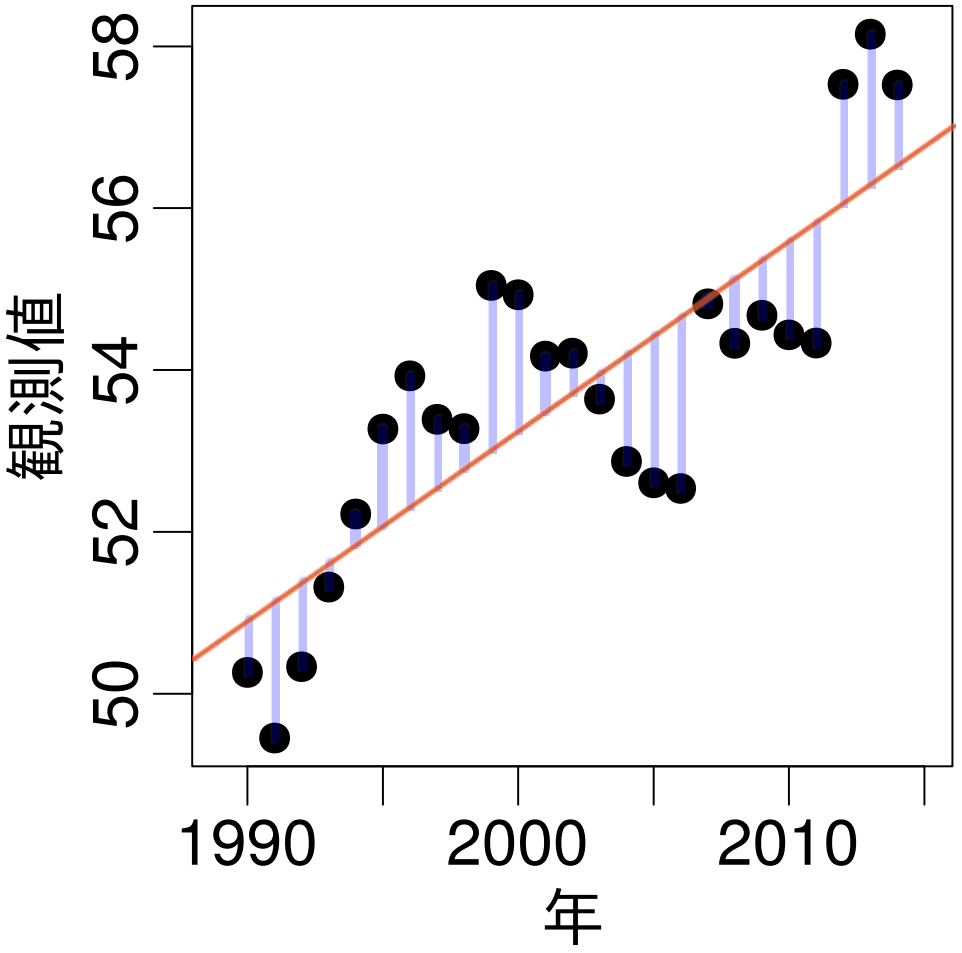
今日の要点

時系列データの解析は

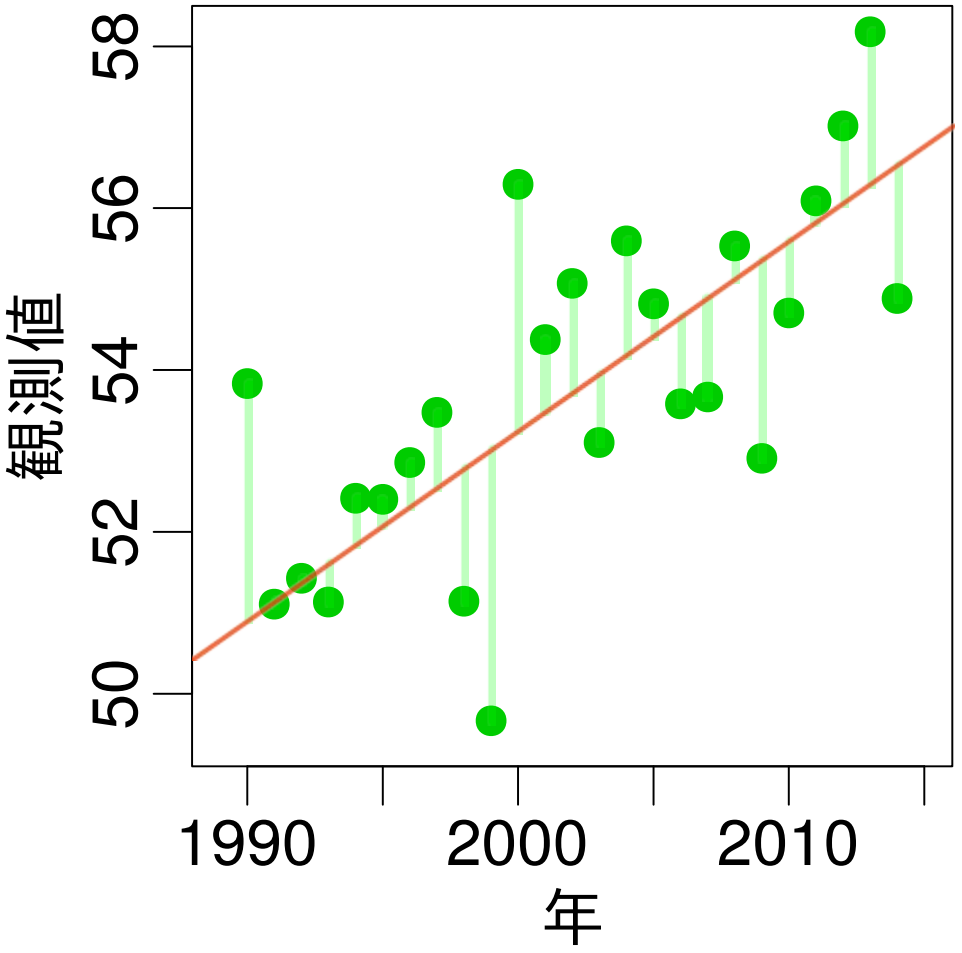
階層ベイズモデル化した

状態空間モデルを使うのが便利

時系列の「ずれ」



GLM のずれ



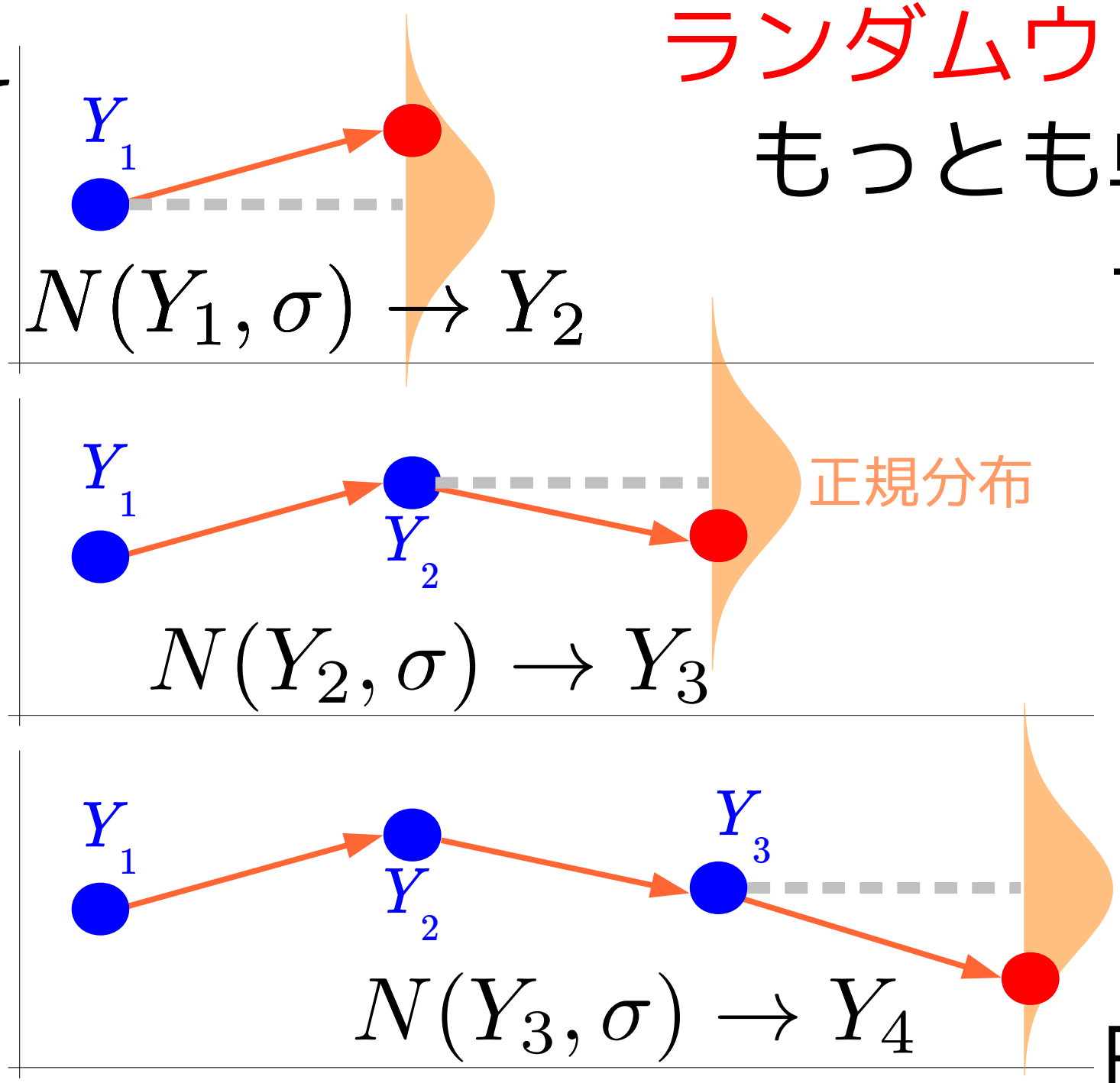
直線からのずれがちがう!

時間的自己相関がある

時間的自己相関がない

ランダムウォーク

もっとも単純なモデル



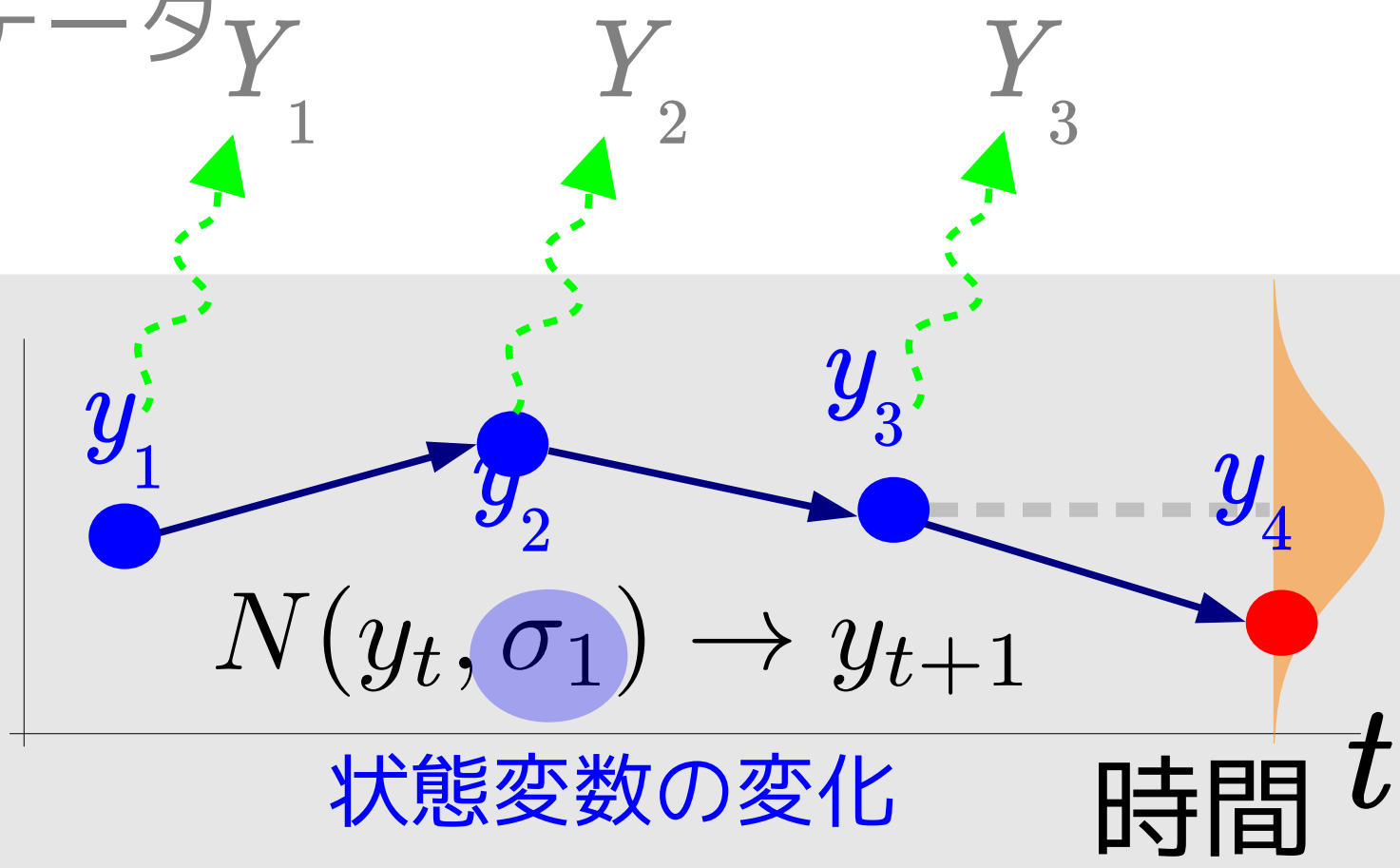
状態空間モデル

二種類のσをもつ

観測の誤差

$$N(y_t, \sigma_2) \to Y_t$$

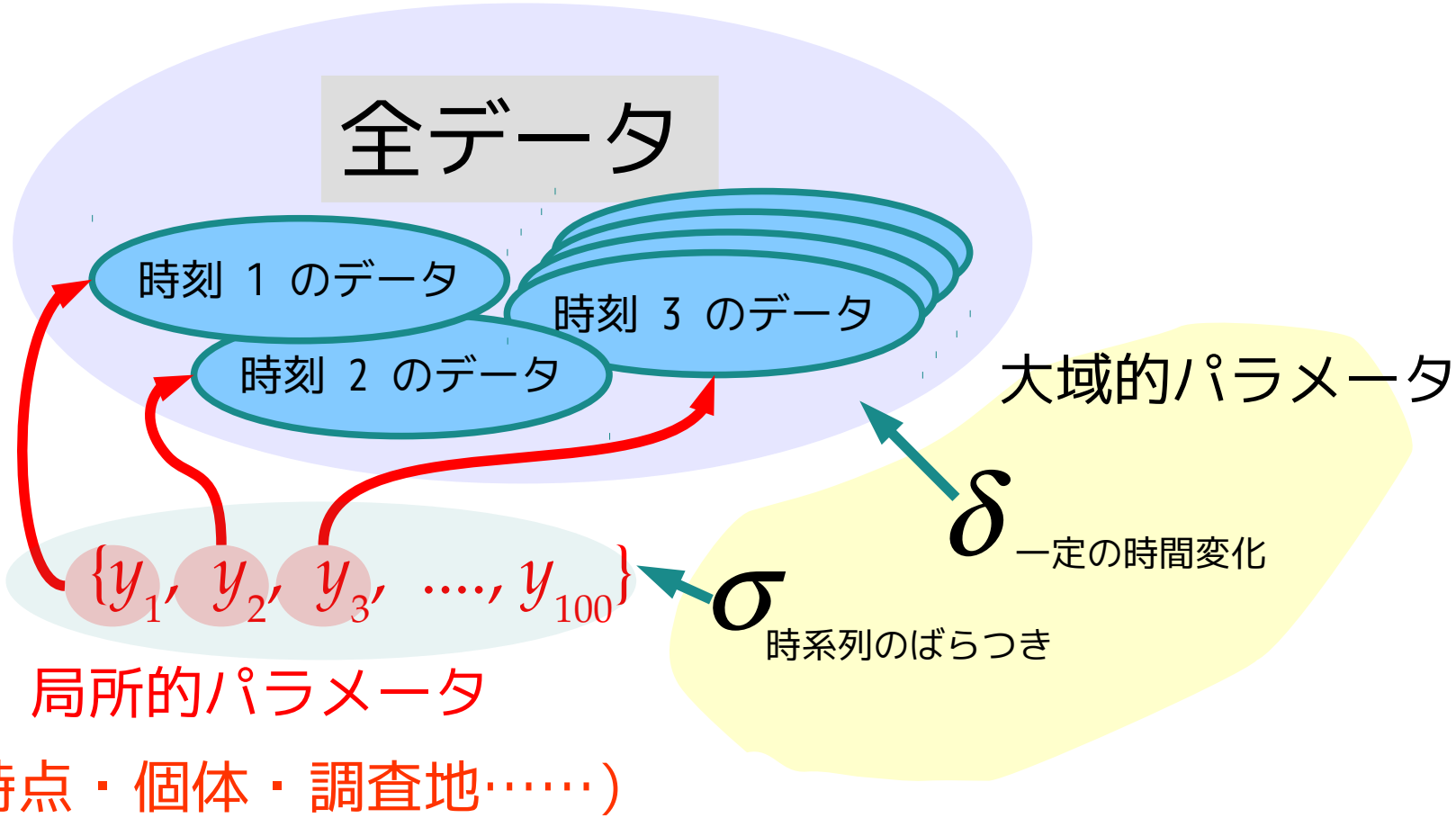
観測データ



観測できない世界（状態空間）

状態空間モデルは階層ベイズモデル

多数の「似たようなパラメーター」たちに
「適切」な制約を加えて推定できる



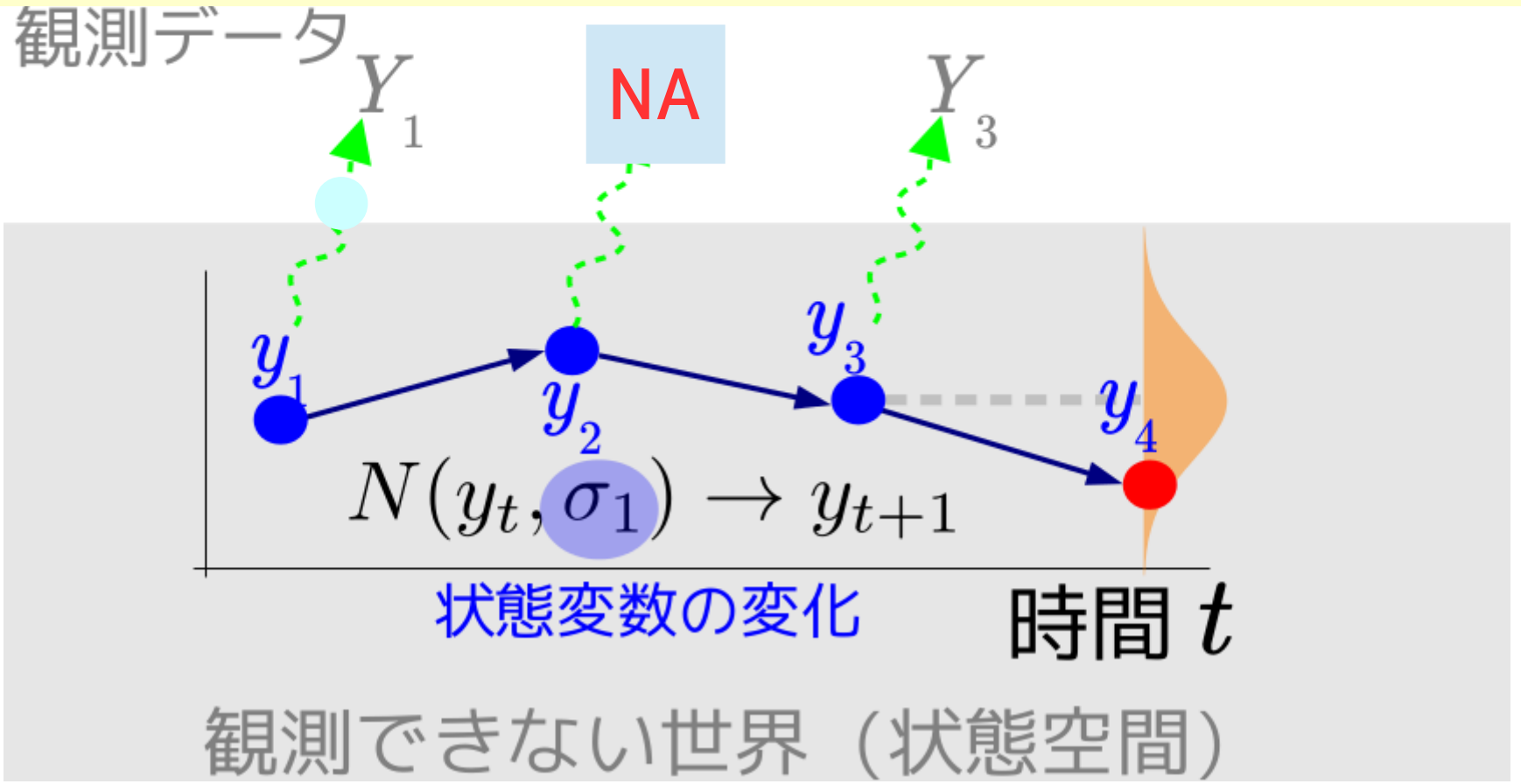
（たくさんの時点・個体・調査地……）

状態空間モデルを使う利点

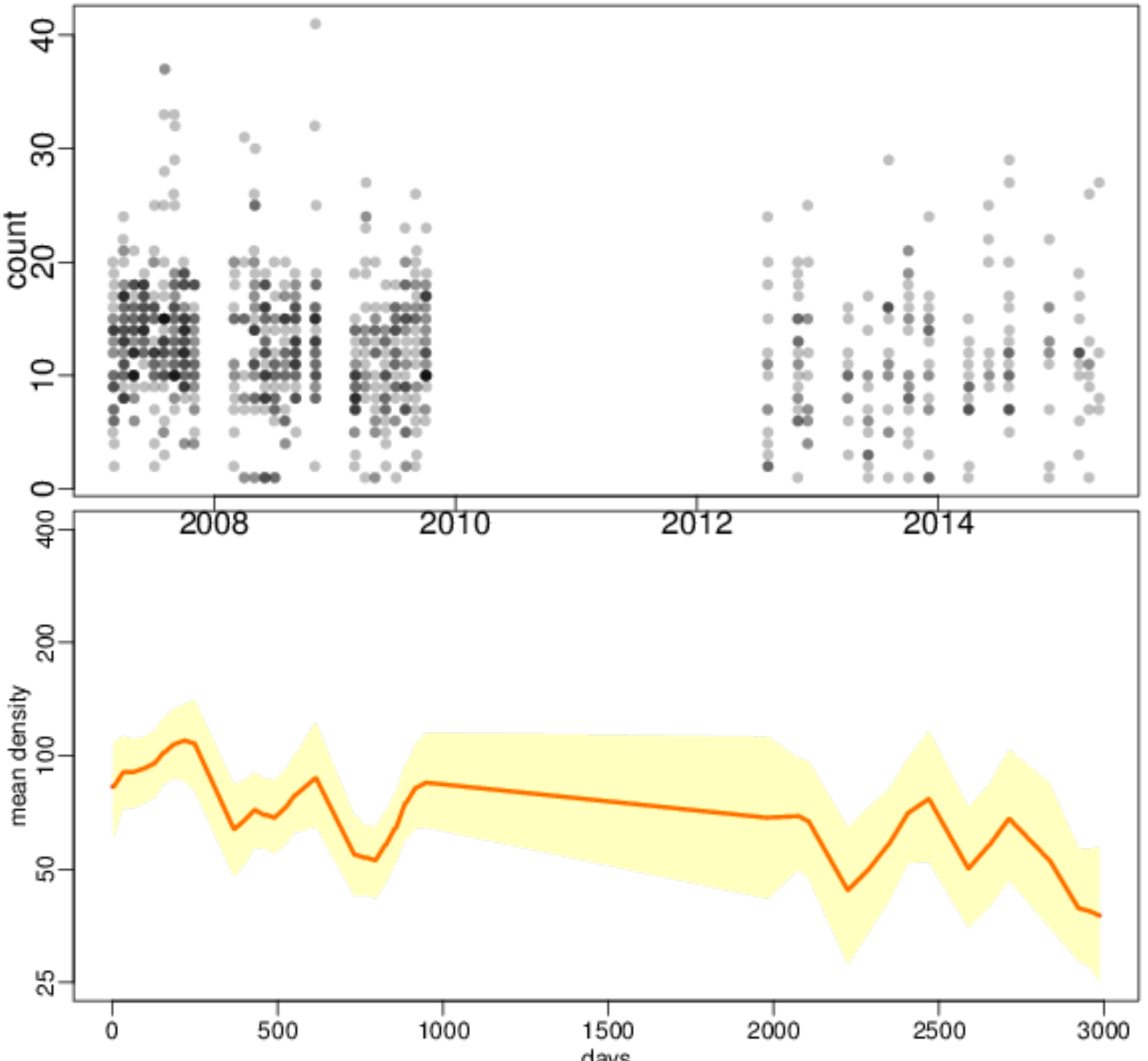
欠測とか不等間隔とか

状態空間モデル + 観測モデル

欠測があっても問題ない
「補完」の必要なし!



不等間隔データでも何とかなります!

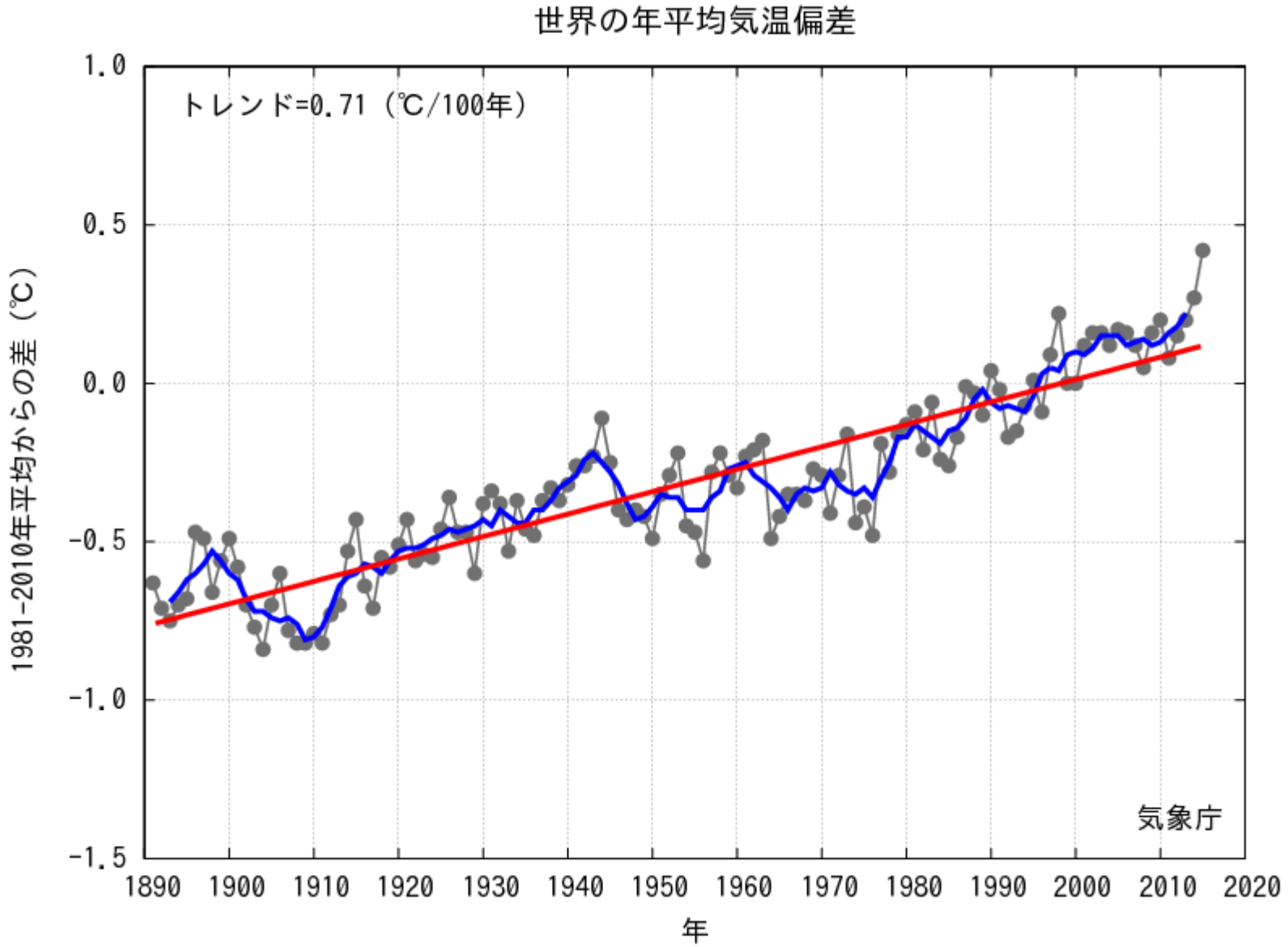


状態空間モデルを使う利点

「ばらばら解析」の回避

気象庁のデータ解析？

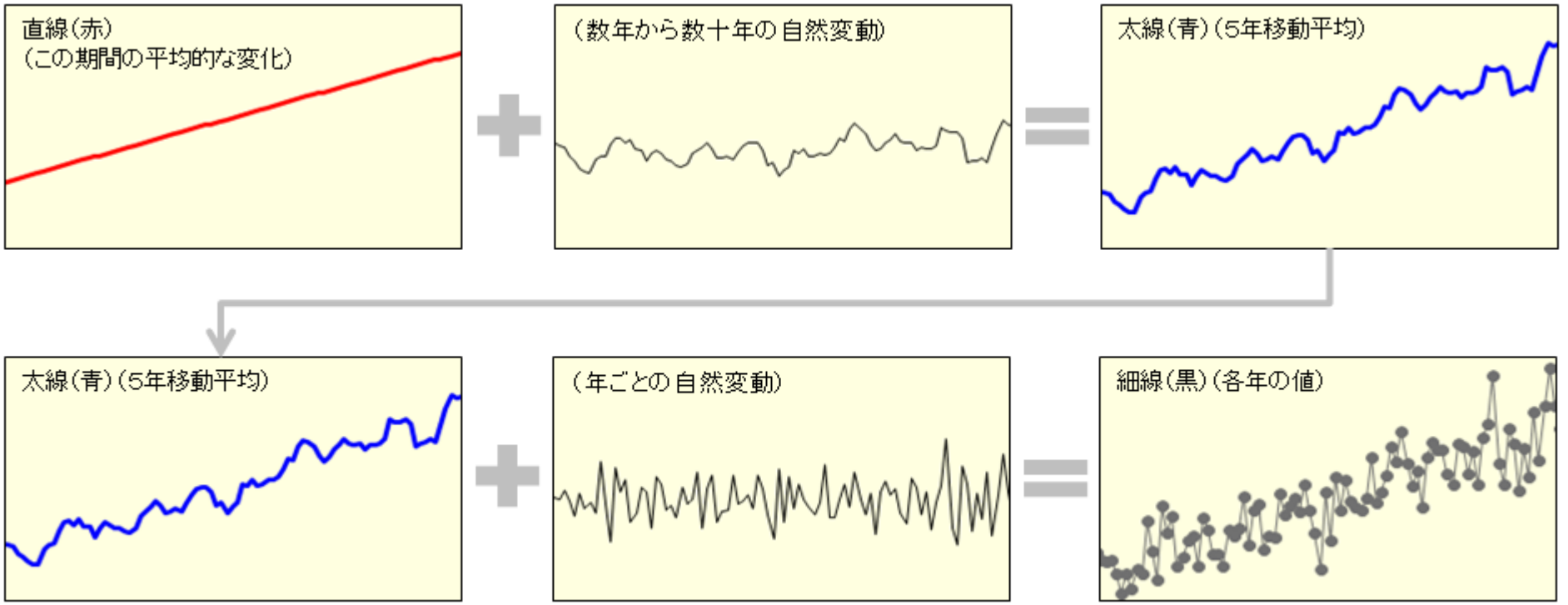
気象庁の長期変化傾向（トレンド）の解説

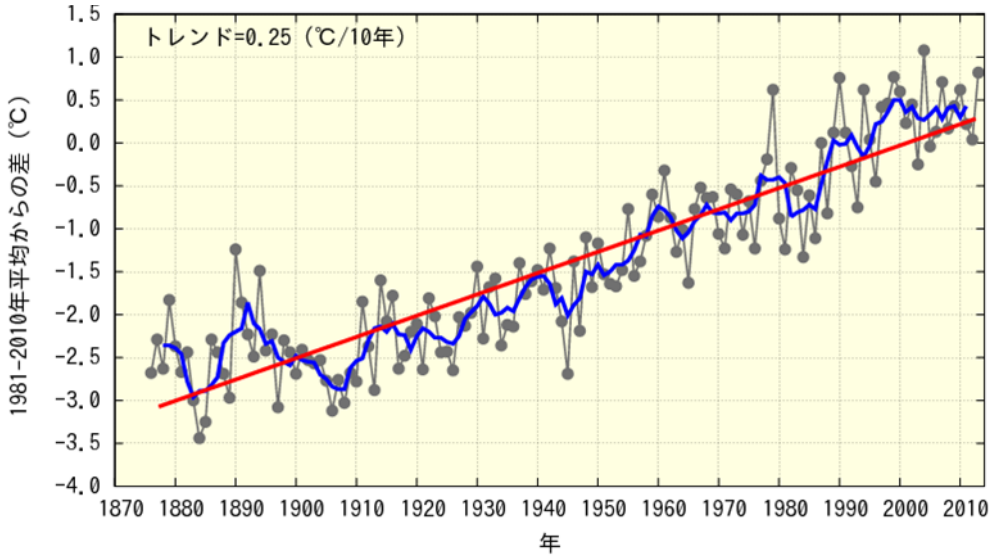


http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/temp/an_wld.html

気象庁の長期変化傾向（トレンド）の解説

http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/temp/trend.html

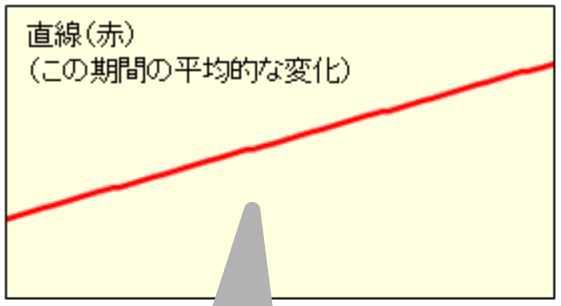


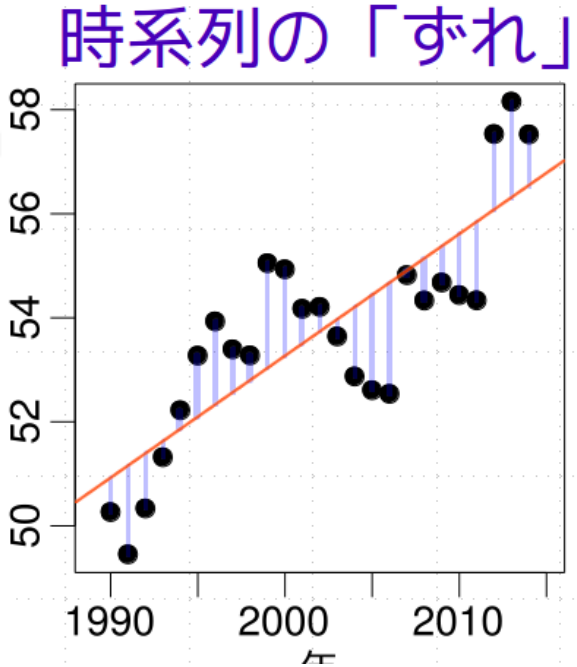


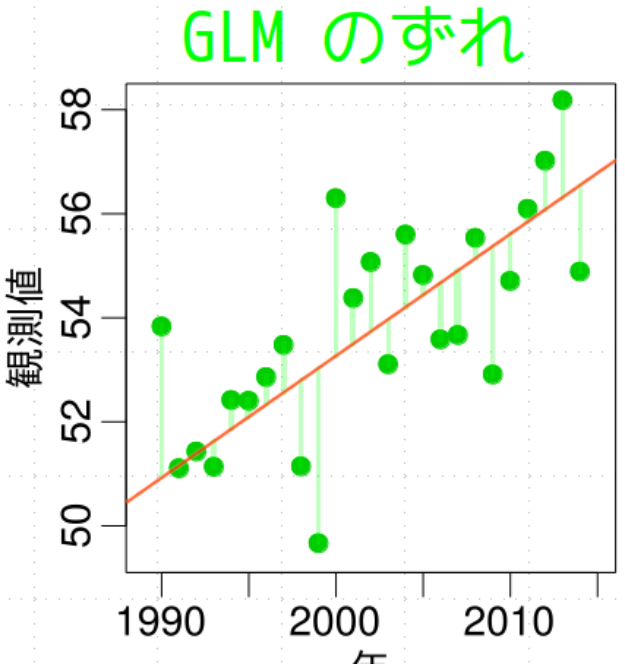
気象庁
ばらばら
メソッド?

気象庁ばらばらメソッド何がまずいか?

http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/temp/trend.html



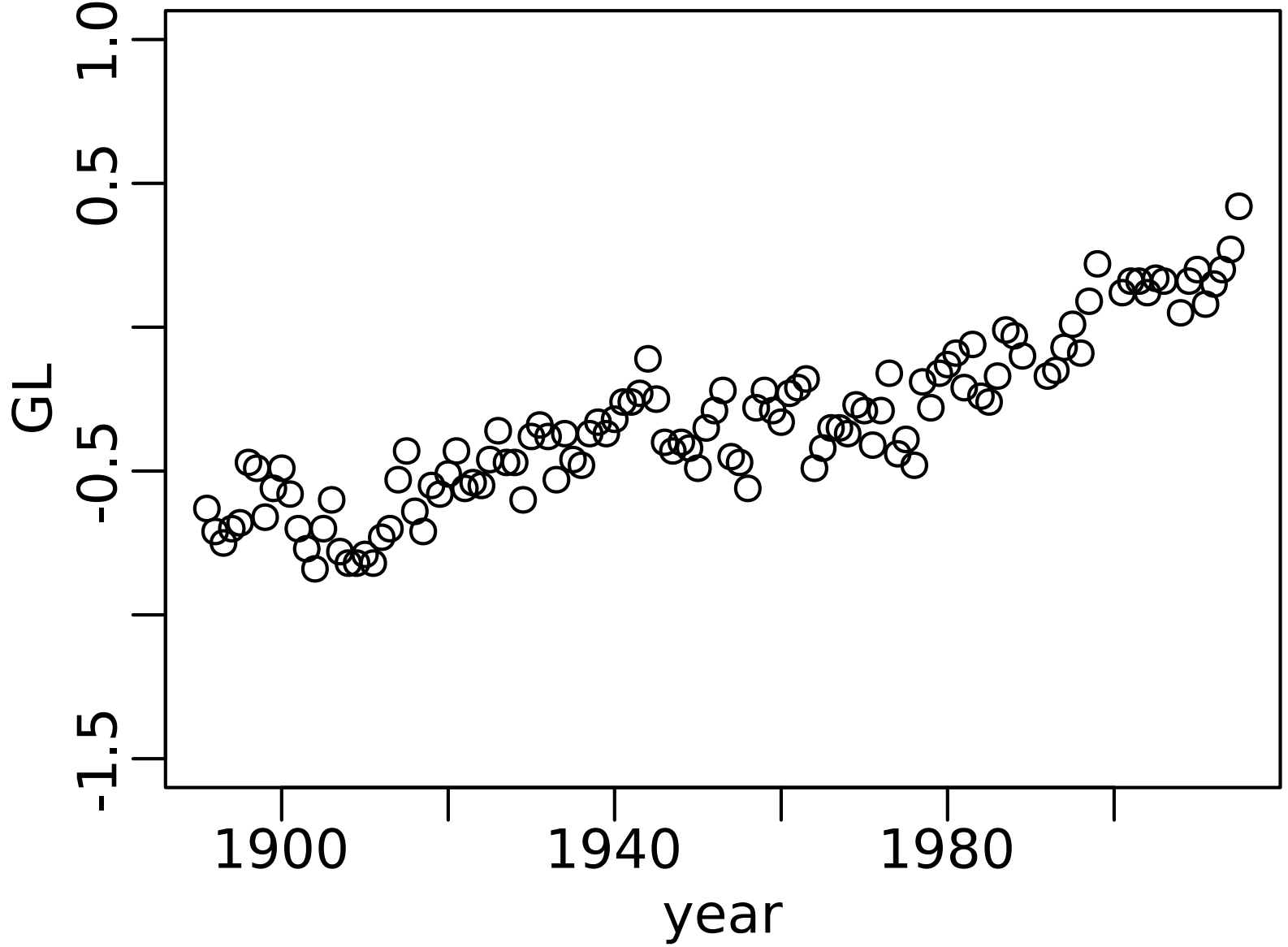




いきなり直線回帰!

(時系列データなんだから…)

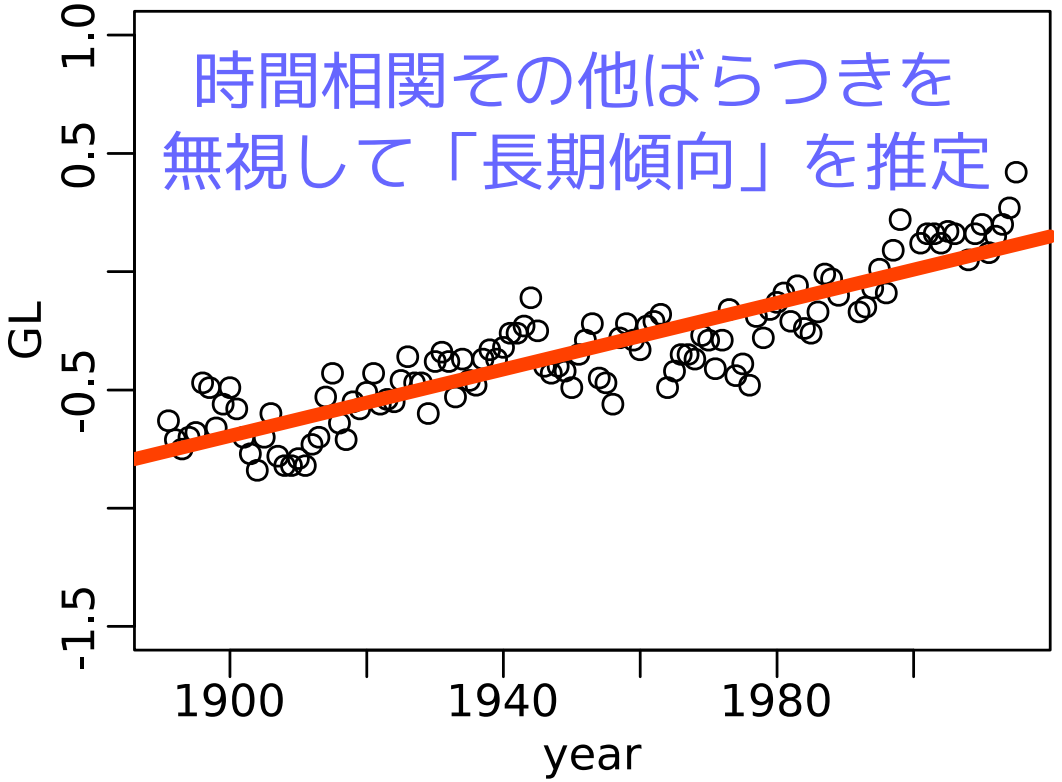
公開データをダウンロード



「とりあえず，直線回帰」の危険性

```
> summary(glm(GL ~ year, data = d))

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.41e+01   6.21e-01   -22.6   <2e-16
year         7.03e-03   3.18e-04    22.1   <2e-16
```

100年あたり0.70℃

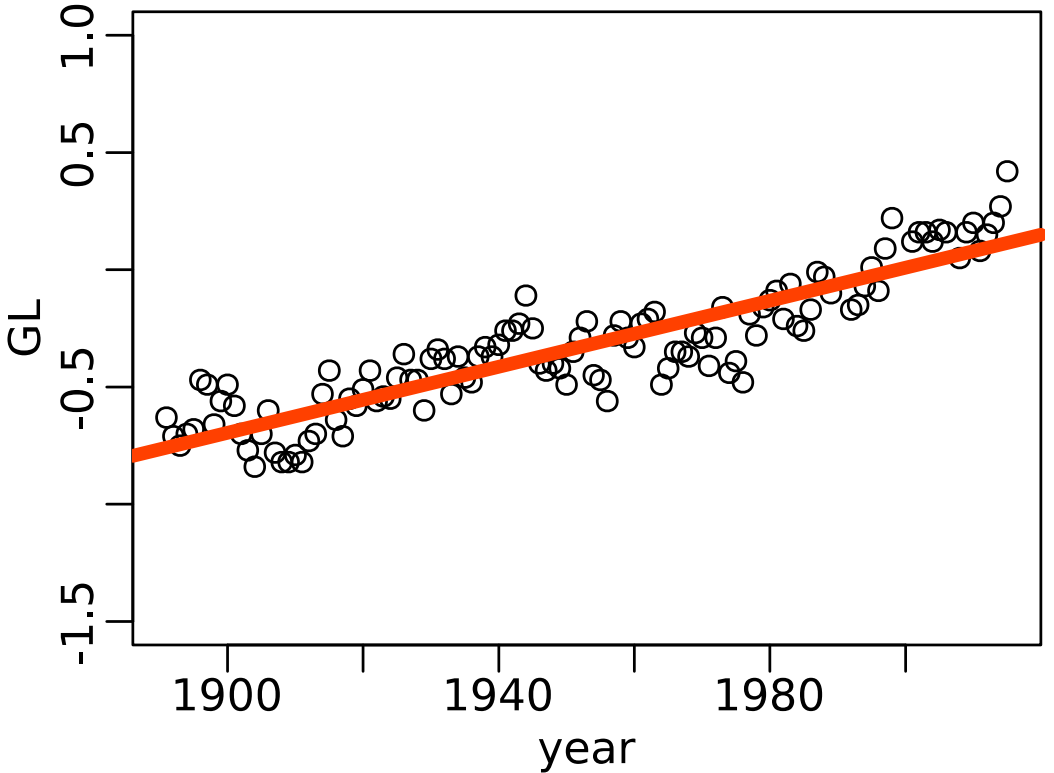


確率 1京ぶんの 2?

直線あてはめ（GLM）が予測した「温暖化」

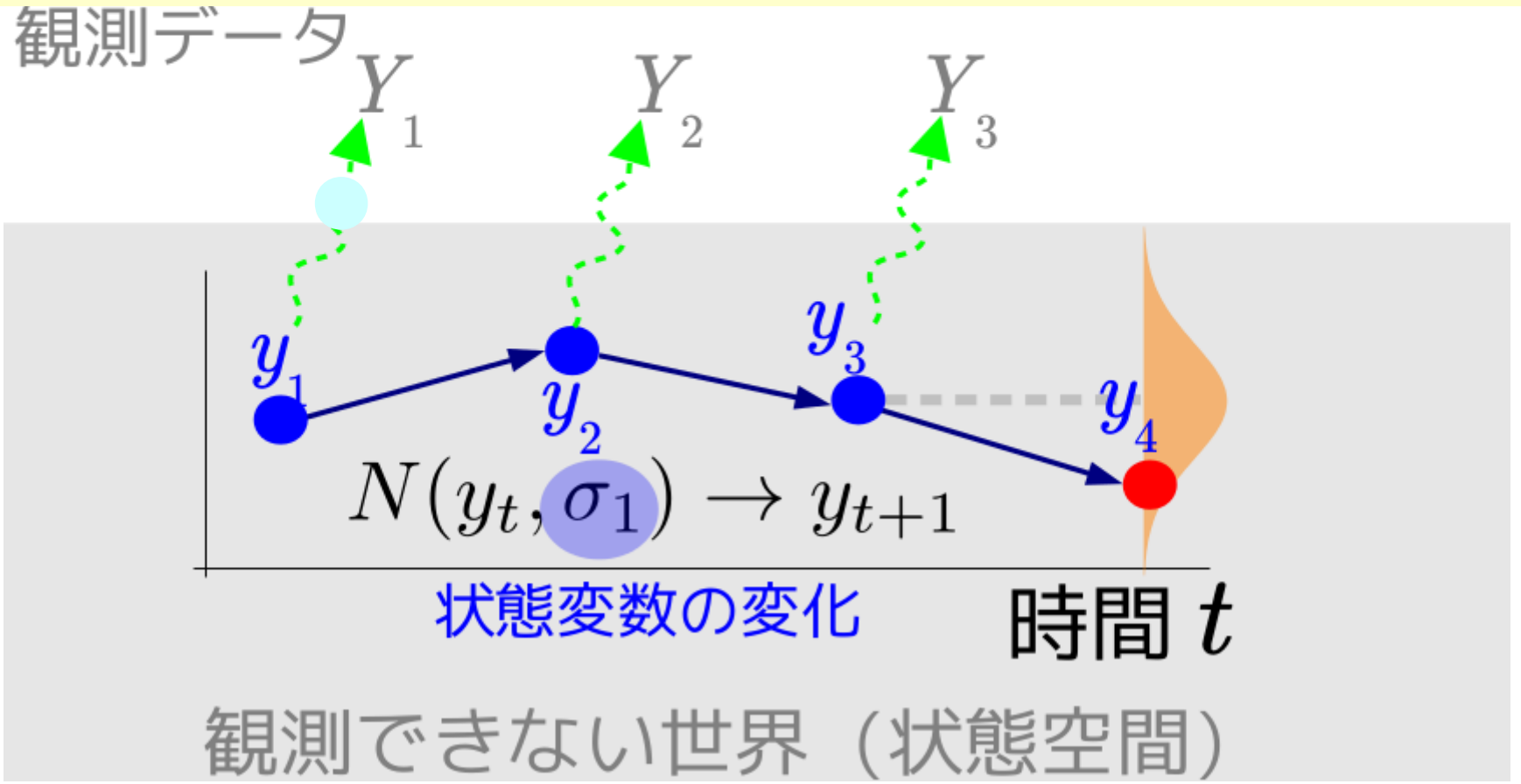
```
> summary(glm(GL ~ year, data = d))

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.41e+01   6.21e-01   -22.6   <2e-16
year         7.03e-03   3.18e-04    22.1   <2e-16
```

100年あたり0.70℃



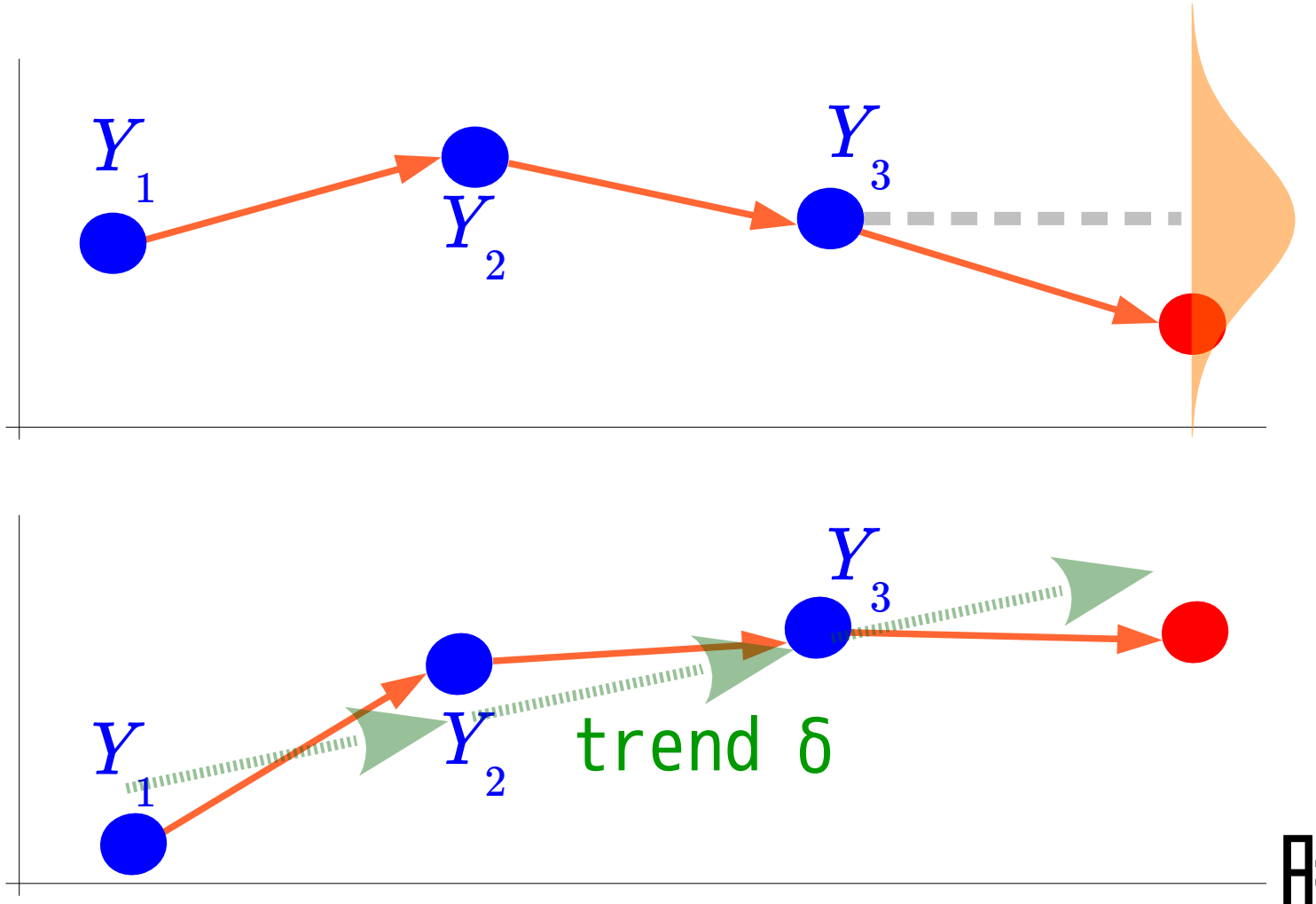
状態空間モデル：すべてを同時に推定

ランダムウォーク+各年独立なノイズ



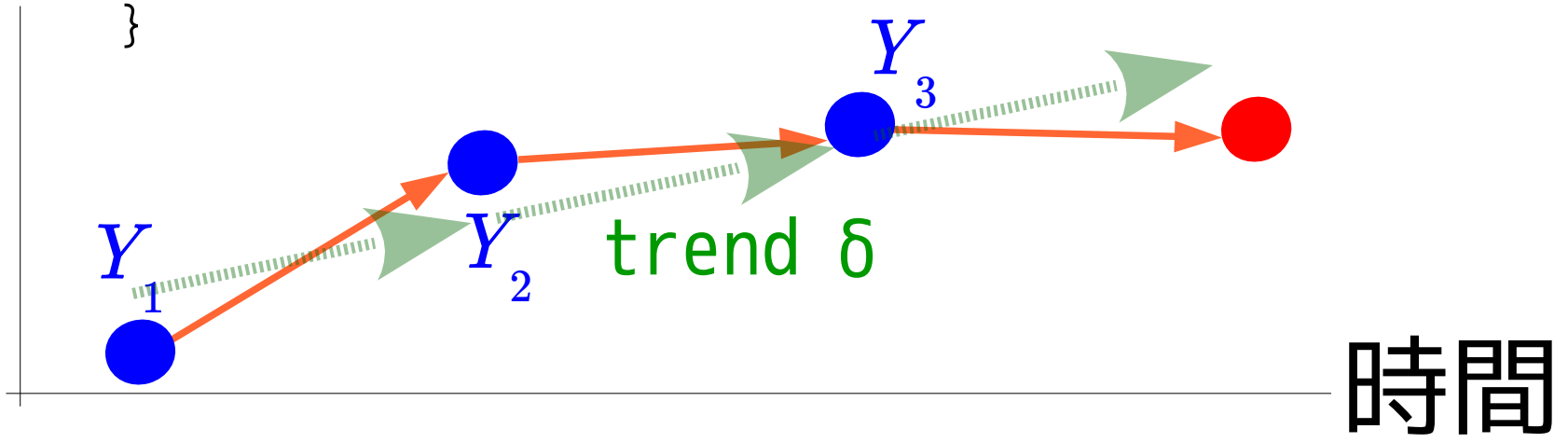
状態空間モデル：すべてを同時に推定

ランダムウォーク+各年独立なノイズ



状態空間モデル：すべてを同時に推定

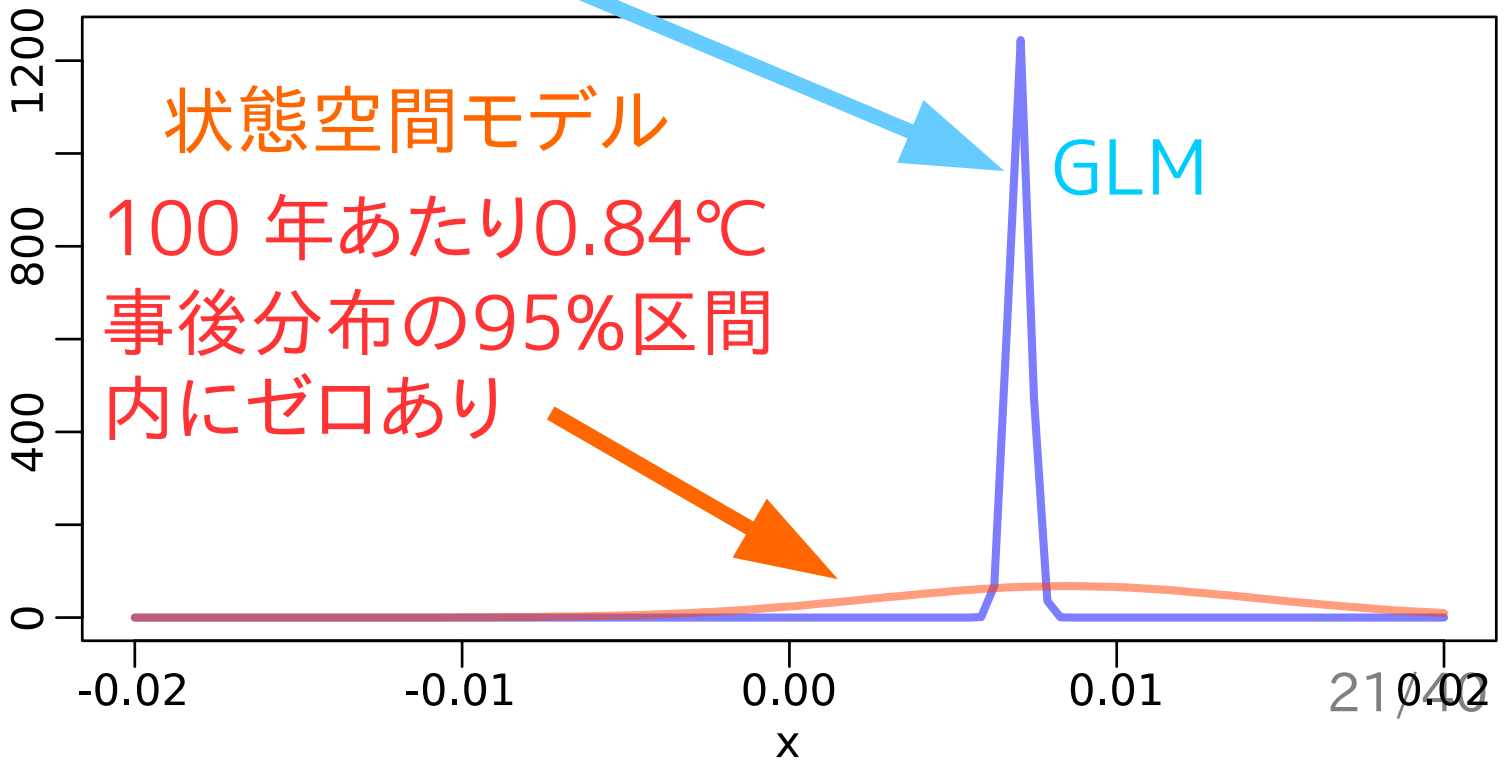
```
Y[1] ~ dnorm(y[1], tau[2])
y[1] ~ dnorm(0.0, Tau.Noninformative)
for (t in 2:N.Y) {
    Y[t] ~ dnorm(y[t], tau[2])
    y[t] ~ dnorm(m[t], tau[1])
    m[t] <- delta + y[t - 1]
}
delta ~ dnorm(0, Tau.Noninformative)
for (k in 1:2) {
    tau[k] <- 1.0 / (s[k] * s[k])
    s[k] ~ dunif(0, 1.0E+4)
}
```



状態空間モデルが予測した「温暖化」

```
> summary(glm(GL ~ year, data = d))

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.41e+01   6.21e-01   -22.6   <2e-16
year         7.03e-03   3.18e-04    22.1   <2e-16
```

100年あたり0.70℃

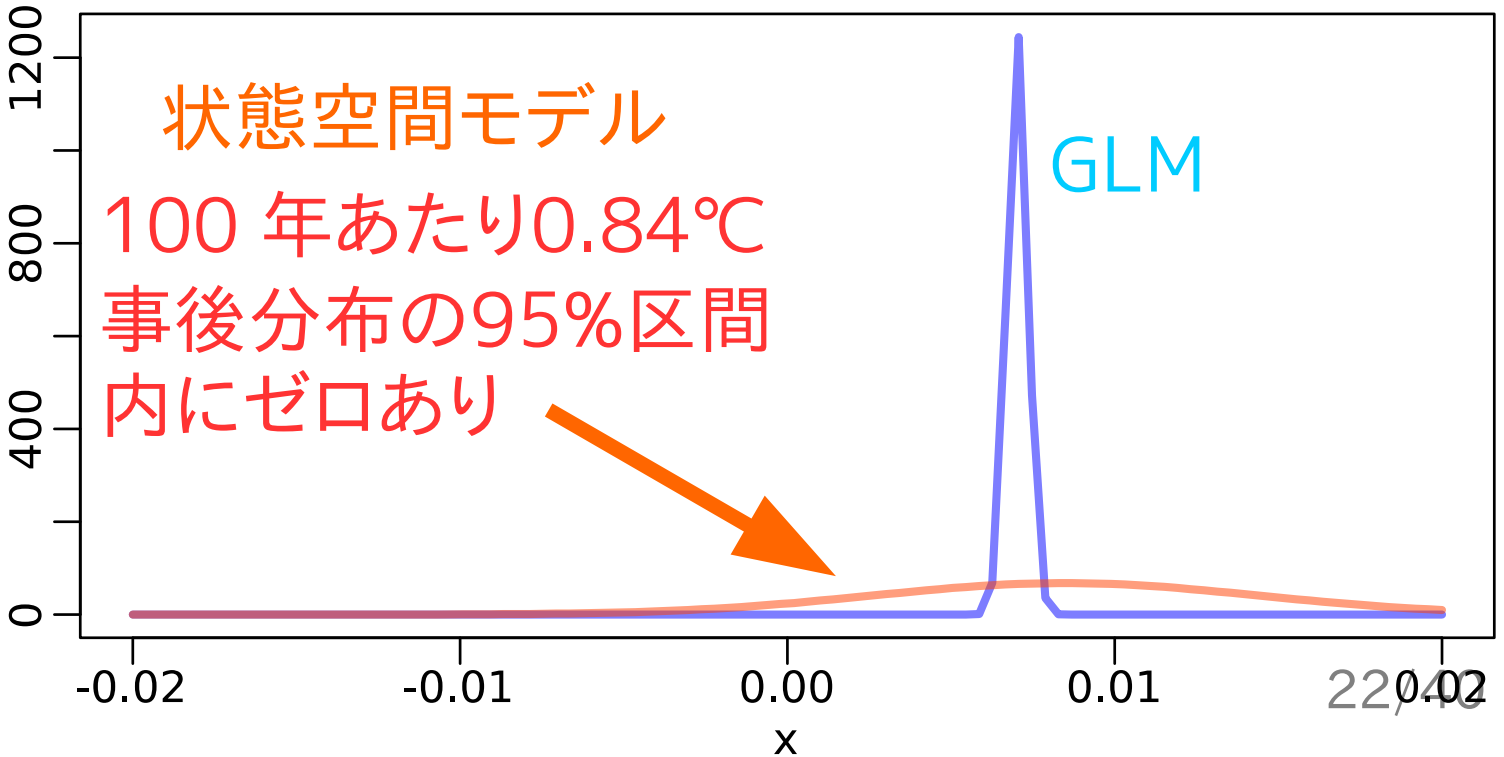


観測値間に相関あり→

実質的な

サンプルサイズが小さくなる

100年
あたり
0.70℃



疑わしい回帰
spurious regression

時系列どうしの回帰

time series Y ~ time series X

時系列データの統計モデリング でやめたほうがいいこと

- GLM: Y(t) ~ t とか Y(t) ~ X(t)
- 段階的解析:観測値の四則演算
- 「残差」の再解析
- 「対応」の無視 – 再測は時系列

「見せかけの回帰」spurious regression

spurious_regression.R

Source on Save | Run | Source

```
1 x <- cumsum(rnorm(100))
2 y <- cumsum(rnorm(100))
3 plot(ts(x), col = "blue", ylim = range(x, y))
4 lines(ts(y), col = "red")
5 print(summary(glm(y ~ x))$coefficients)
```

5:40 (Top Level) R Script

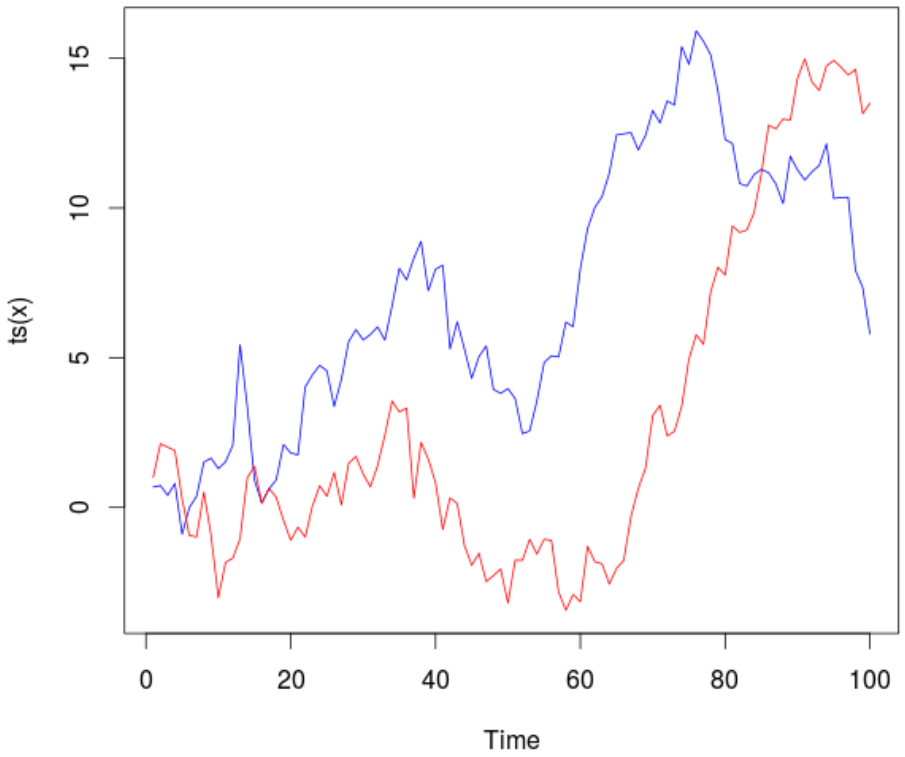
Console ~/

```
> plot(ts(x), col = "blue", ylim = range(x, y))

> lines(ts(y), col = "red")

> print(summary(glm(y ~ x))$coefficients)
             Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept) -1.67120    0.90288 -1.8510 6.7186e-02
x            0.64551    0.10803  5.9753 3.7127e-08
```

Environment | History

Files | Plots | Packages | Help | Viewer

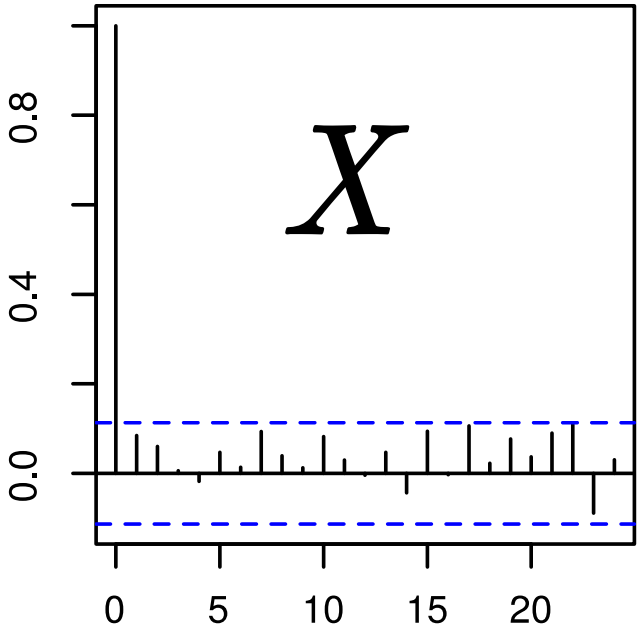
Zoom | Export | Publish

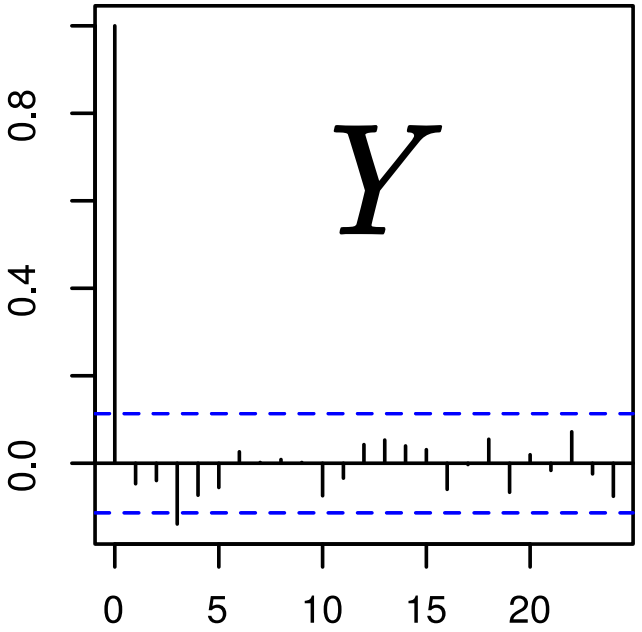


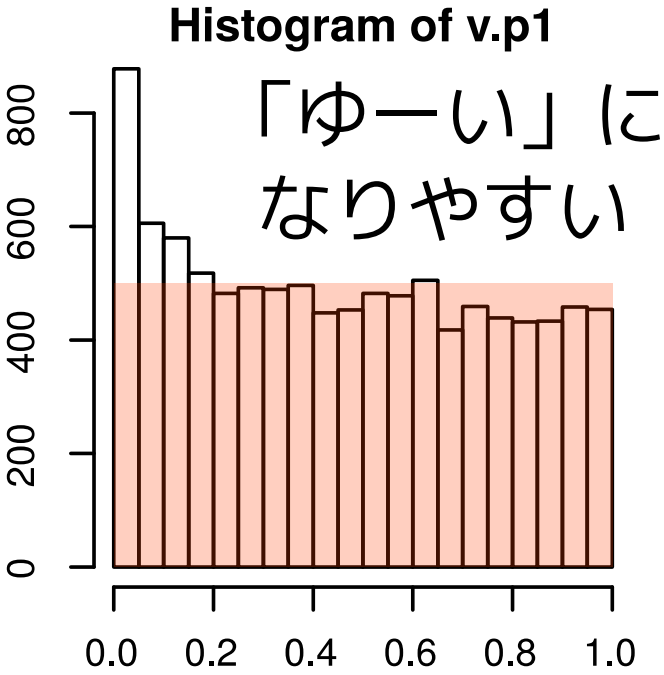
ちょっとだけ実演してみます

ノイズの大きな時系列にうもれたワナ？

時間的自己相関のない時系列？



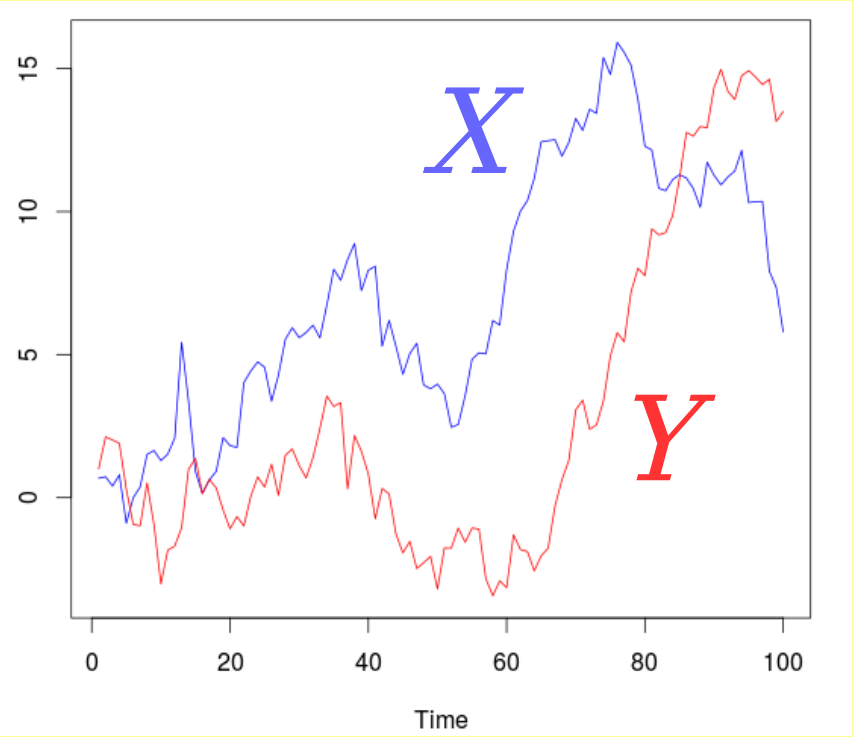




しかし glm(Y ~ X) とすると…

$Y \sim X$

疑わしい回帰
spurious regression



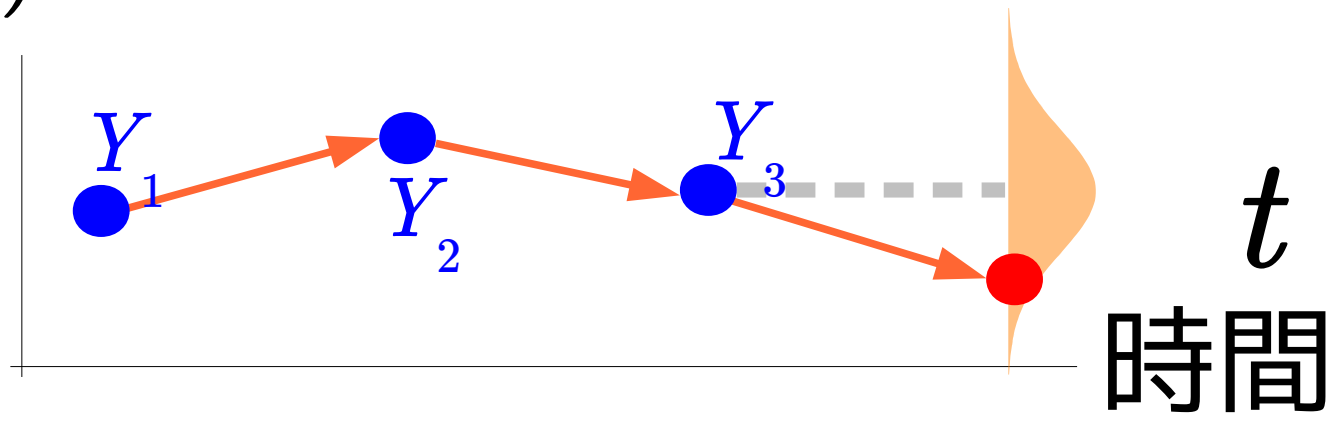
この問題も

状態空間モデル（SSM)で

解決できないだろうか?

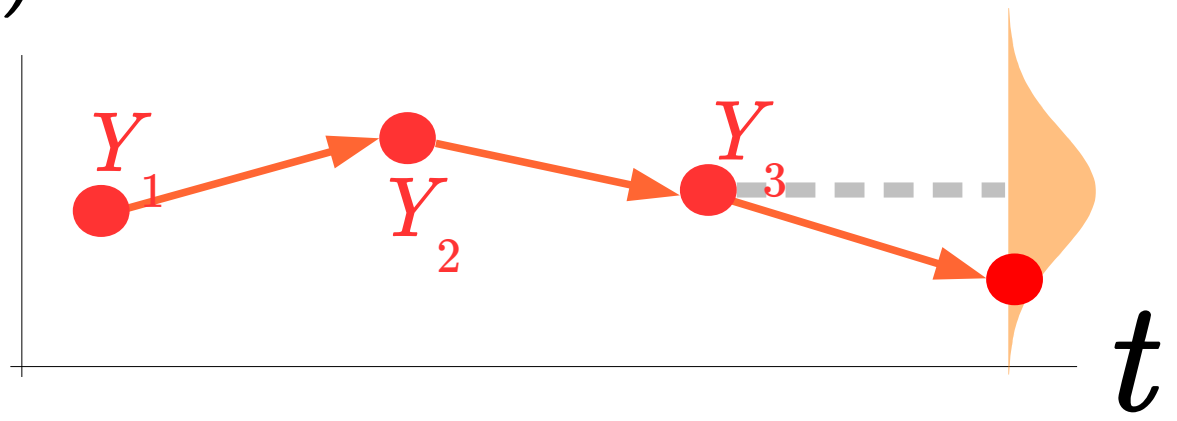
二変量のランダムウォーク
モデルを作れないか?

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$

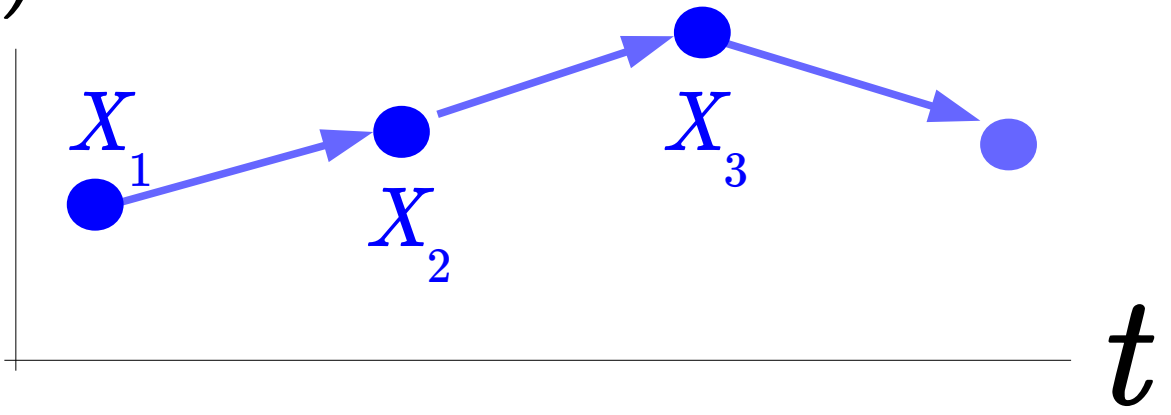


二変量のランダムウォーク
Y_t と X_t は独立

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$



$$X_{t+1} \sim N(X_t, s_x)$$



二変量のランダムウォーク

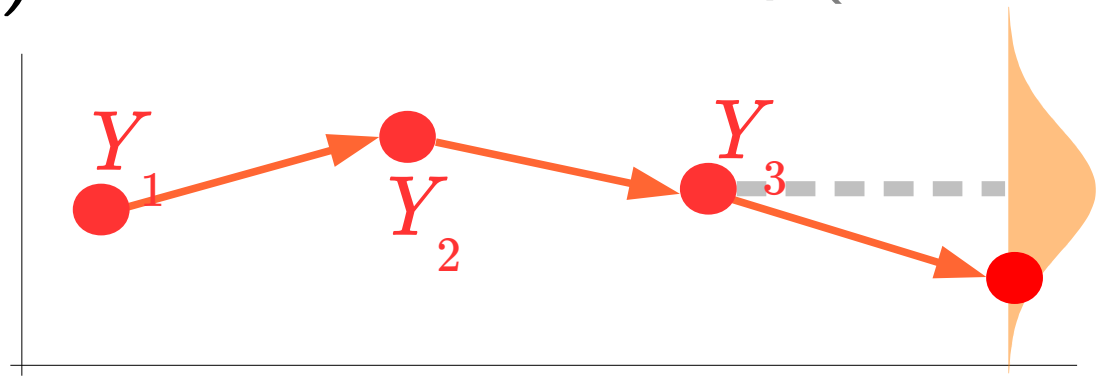
Y_t と X_t は独立

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$

$$X_{t+1} \sim N(X_t, s_x)$$

このあたりで
何とかならないか?

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$ 一変量の正規分布(密度関数)



二変量の正規分布(密度関数)

Bivariate case

In the 2-dimensional nonsingular case (k = rank(Σ) = 2), the probability density function of a vector $[X\ Y]'$ is:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

where ρ is the correlation between X and Y and where $\sigma_X > 0$ and $\sigma_Y > 0$. In this case,

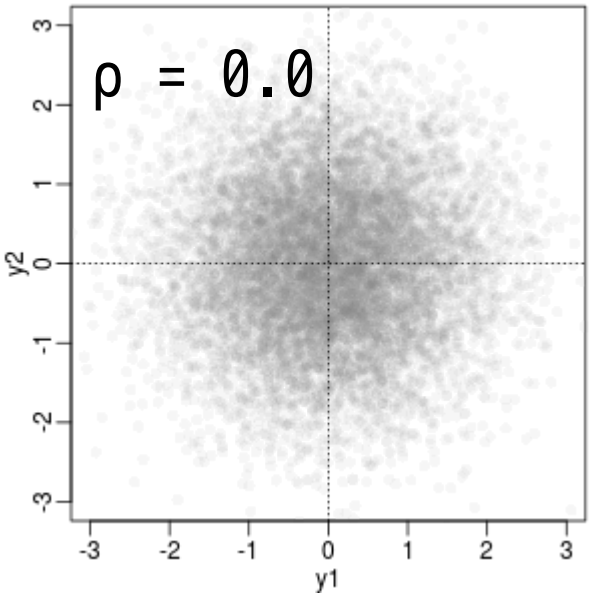
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

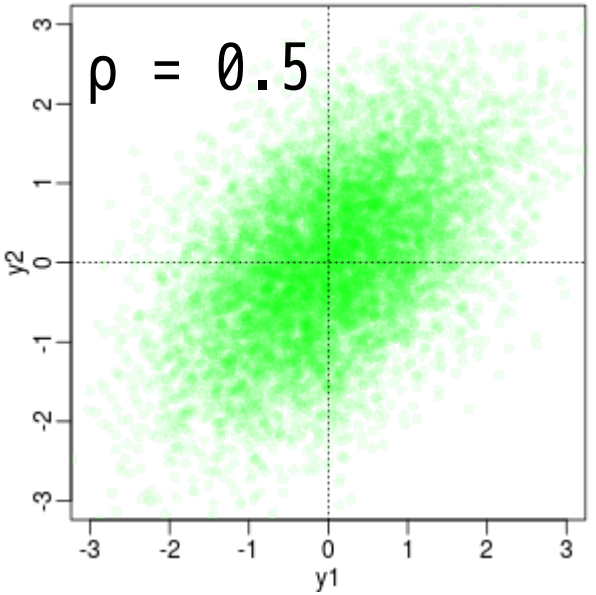
分散共分散行列

相関係数 ρ

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

無相関





正の相関

二変量の正規分布(密度関数)

Bivariate case

In the 2-dimensional nonsingular case (k = rank(Σ) = 2), the probability density function of a vector $[X\ Y]'$ is:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

where ρ is the correlation between X and Y and where $\sigma_X > 0$ and $\sigma_Y > 0$. In this case,

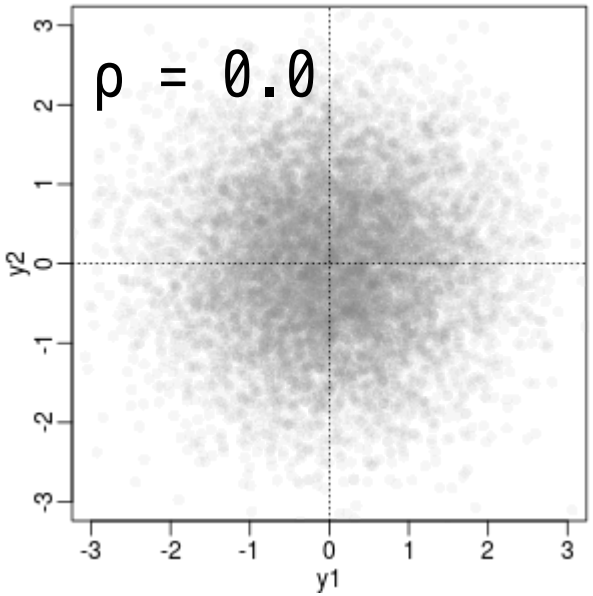
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2\end{pmatrix}.$$

分散共分散行列

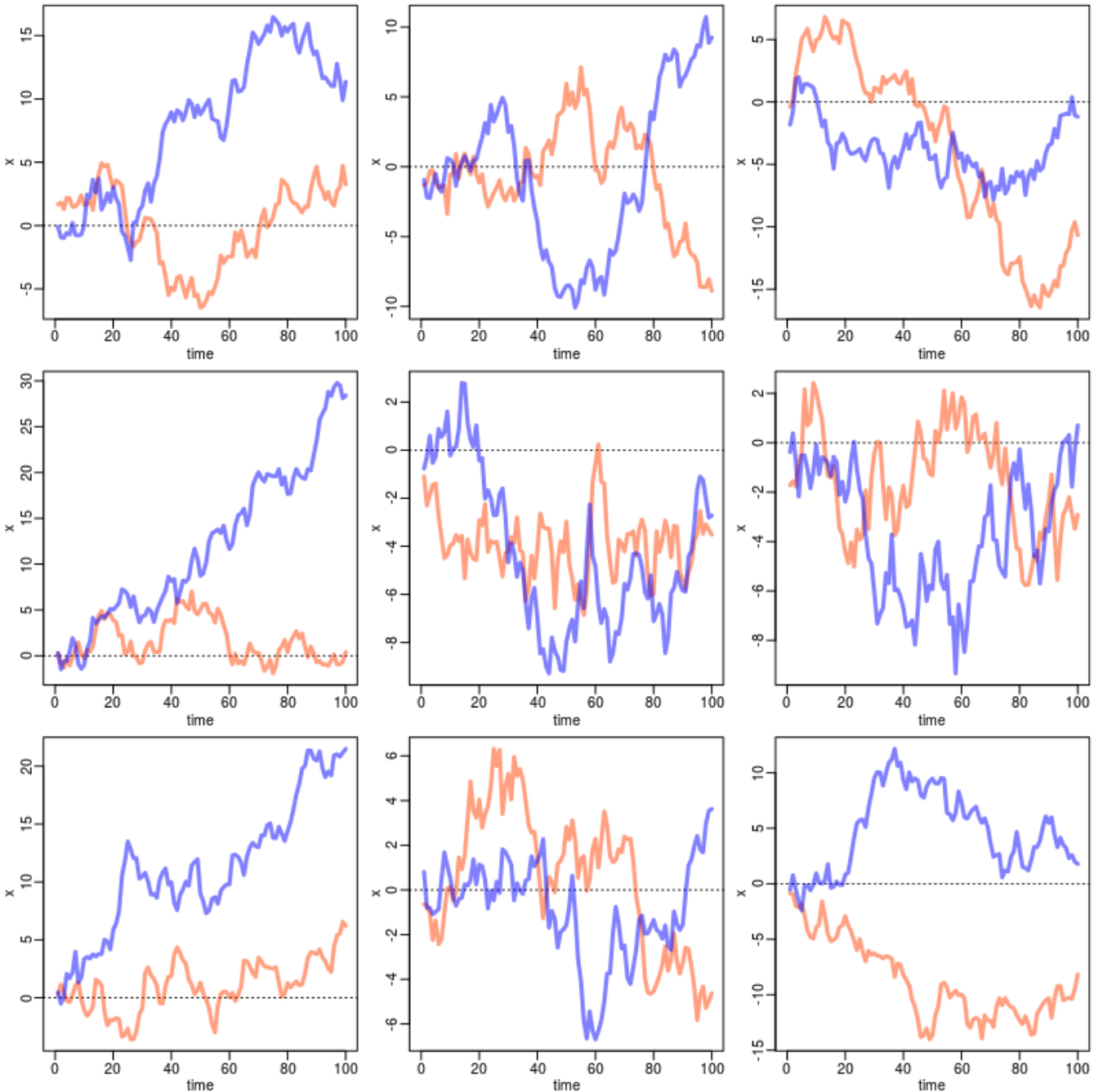
相関係数 ρ

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

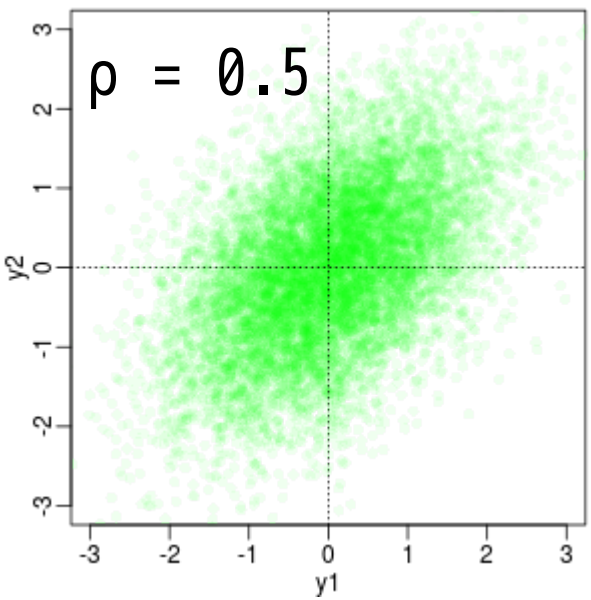
二変量正規分布とランダムウォーク　例1



無相関



二変量正規分布とランダムウォーク　例2

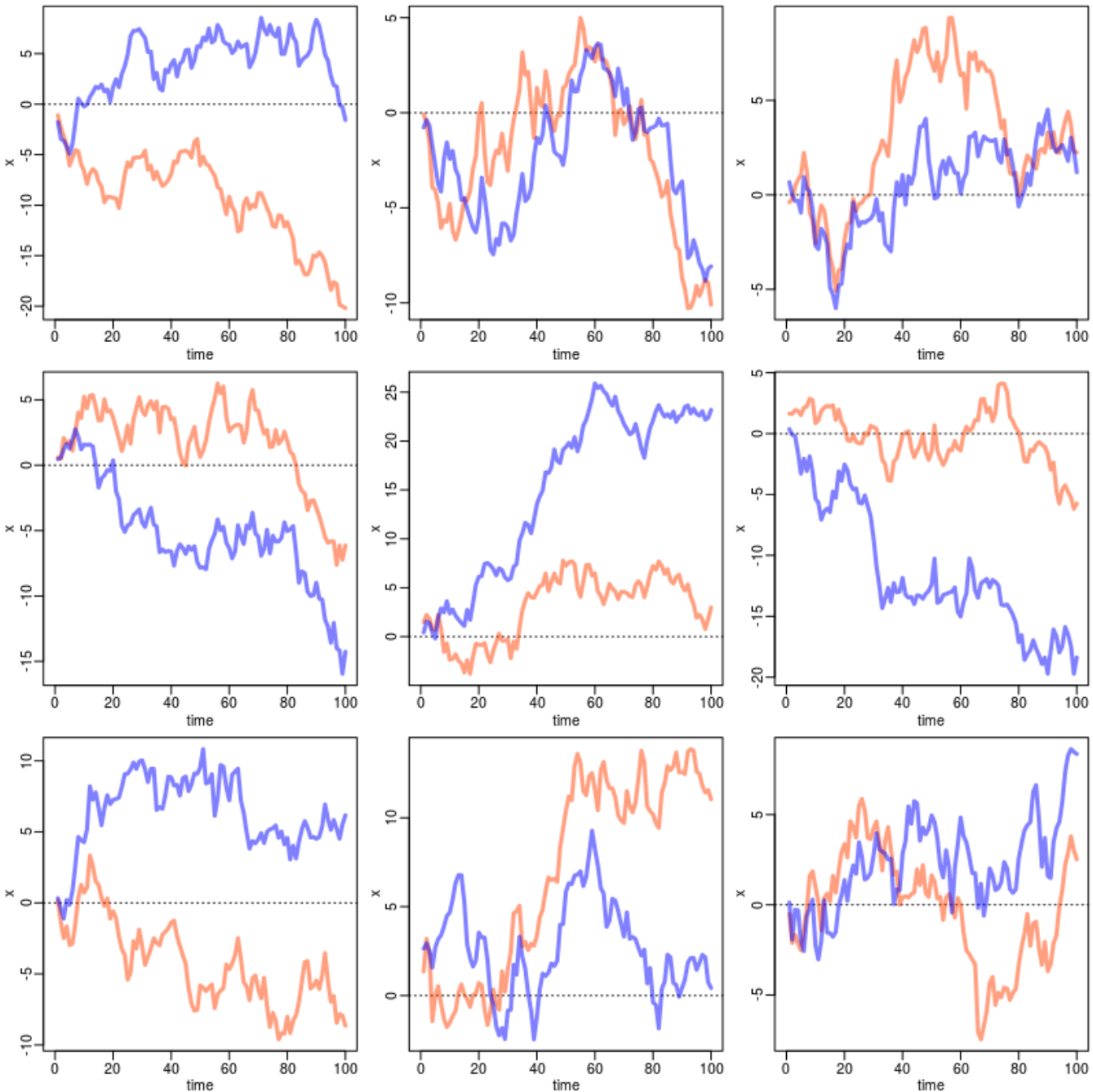


正の相関

時間があれば

demo

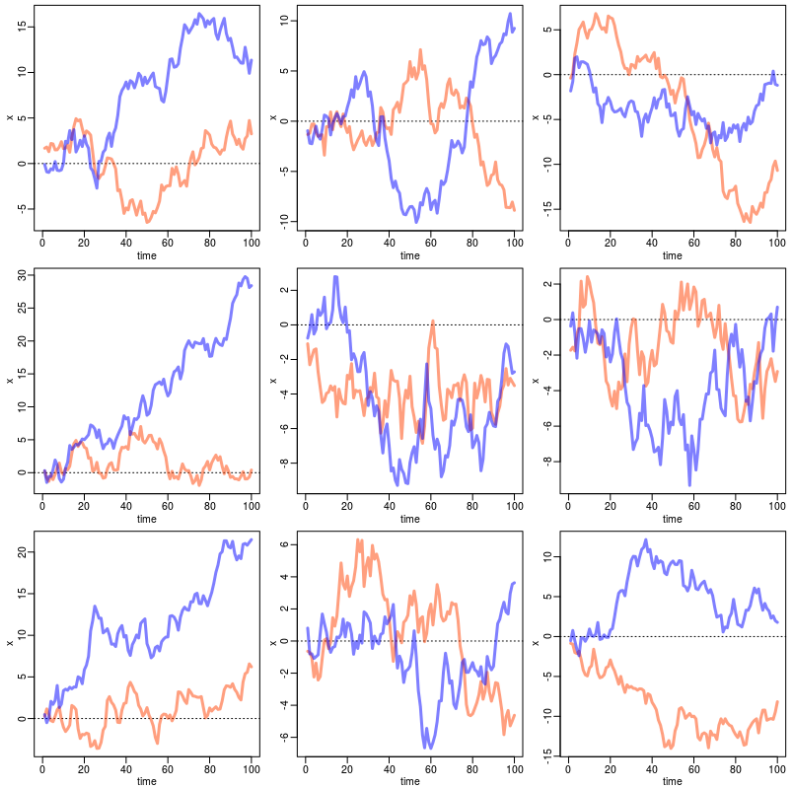
`sample_rvar.R`



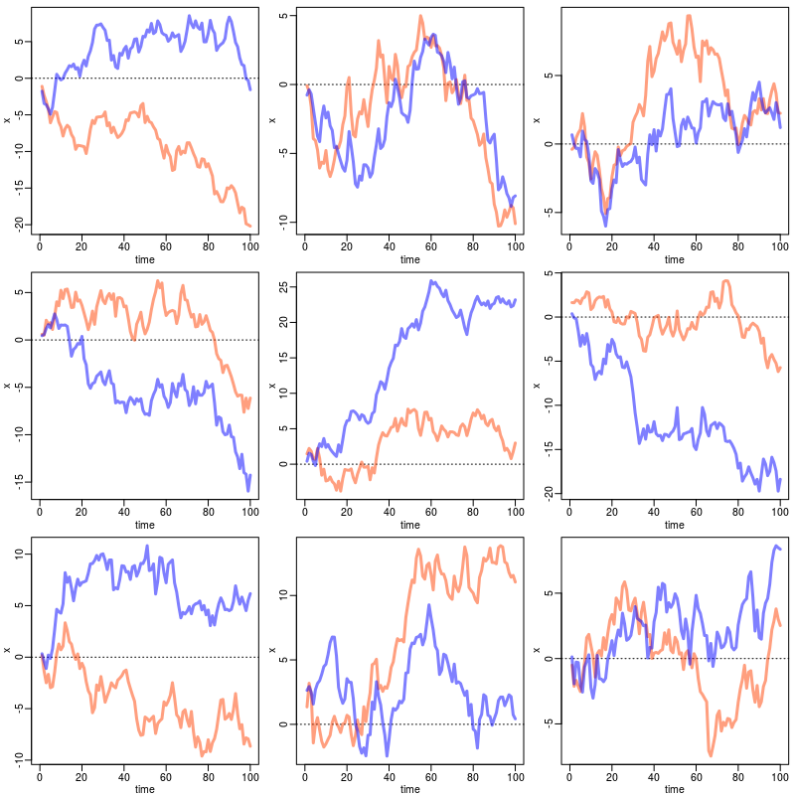
追加スライド

二変量正規分布とランダムウォーク

X と Y の相関係数 ρ を推定できるのか?



$\rho = 0.0$



$\rho = 0.5$

二変量正規分布を部品とする状態空間モデル

```
for (i in 1:N.Y) {
    Y[i, 1:2] ~ dmnorm(mu[1:2], Omega[1:2, 1:2])
}
mu[1] ~ dunif(-1.0E+4, 1.0E+4)
mu[2] ~ dunif(-1.0E+4, 1.0E+4)
Omega[1:2, 1:2] <- inverse(VarCov[1:2, 1:2])
VarCov[1, 1] <- sigma[1] * sigma[1]
VarCov[1, 2] <- sigma[1] * sigma[2] * rho
VarCov[2, 1] <- sigma[2] * sigma[1] * rho
VarCov[2, 2] <- sigma[2] * sigma[2]
sigma[1] ~ dunif(0.0, 1.0E+4)
sigma[2] ~ dunif(0.0, 1.0E+4)
rho ~ dunif(-1.0, 1.0)
```

（R で実演）

階層ベイズモデルである

状態空間モデル

から得られた事後分布

```
 3 chains, each with 5200 iterations (first 200 discarded)
 n.sims = 15000 iterations saved
           mean    sd   2.5%    25%    50%    75% 97.5%  Rhat n.eff
mu[1]    -0.122 0.110 -0.342 -0.195 -0.120 -0.048 0.090 1.001  6000
mu[2]    -0.157 0.100 -0.355 -0.224 -0.157 -0.091 0.041 1.002  1500
sigma[1]  1.091 0.079  0.949  1.036  1.086  1.142 1.261 1.001  6100
sigma[2]  0.993 0.074  0.864  0.941  0.987  1.039 1.151 1.001  4100
rho       0.568 0.070  0.420  0.523  0.573  0.617 0.693 1.001 11000
```

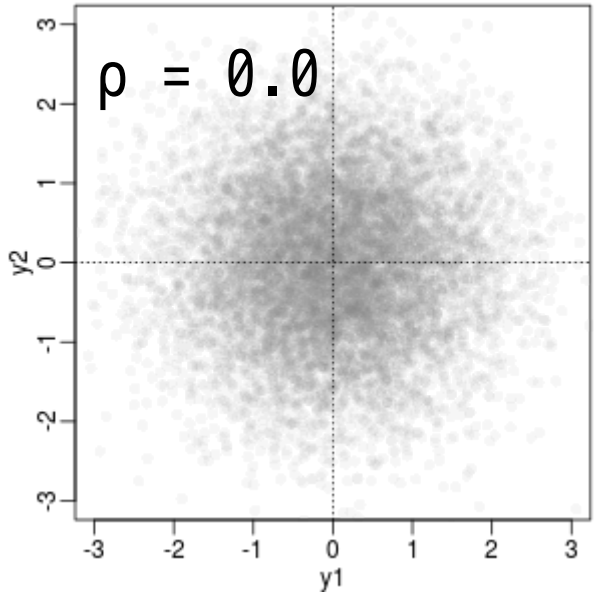
ふたつの時系列データの変動が

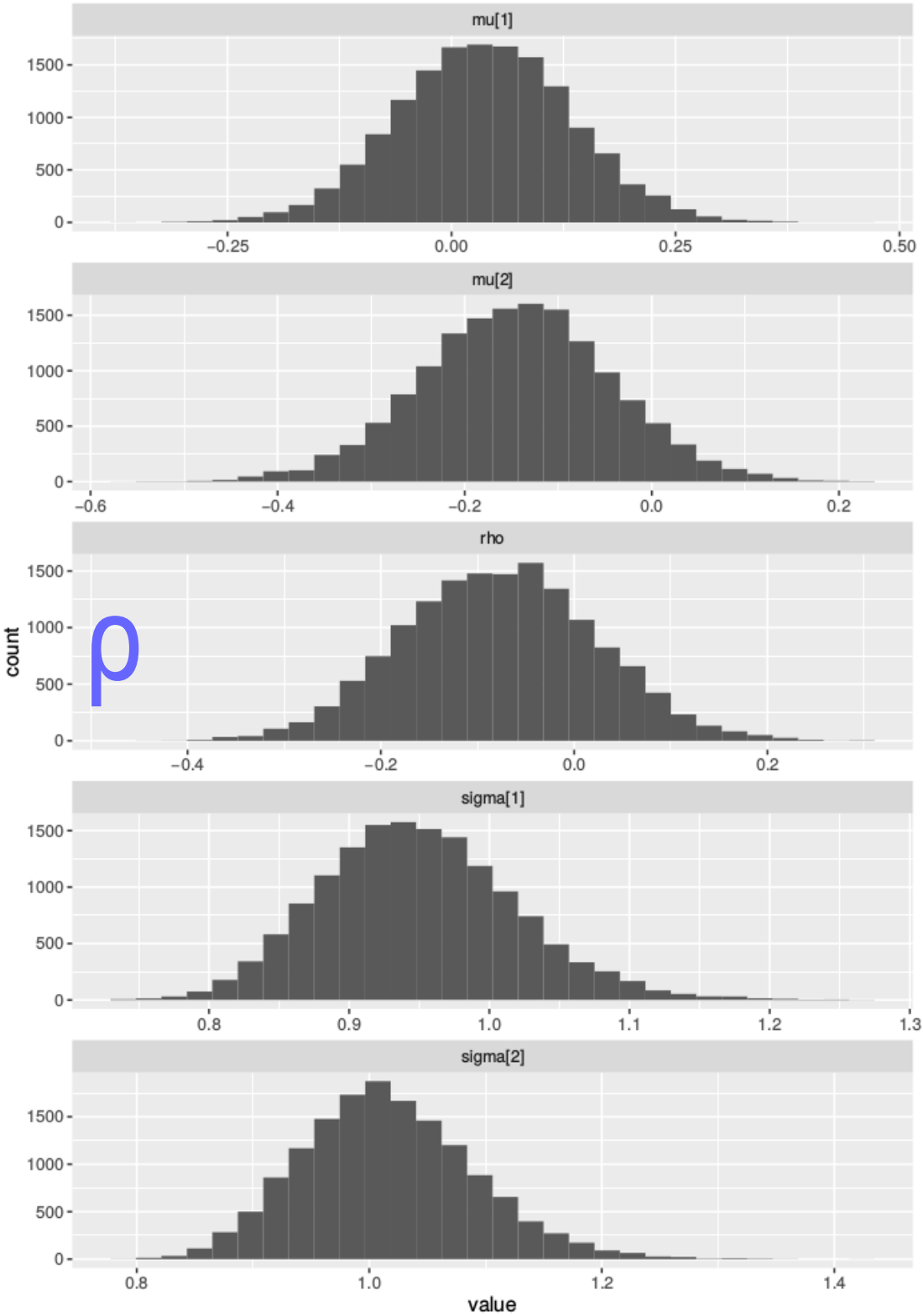
相関しているかどうかを特定できる

図示すると……

追加スライド

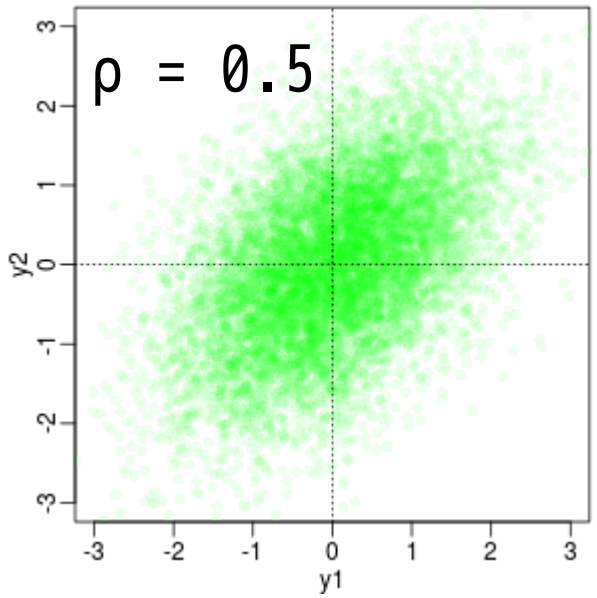
状態空間モデルの
パラメーターの
事後分布（ρ = 0.0）

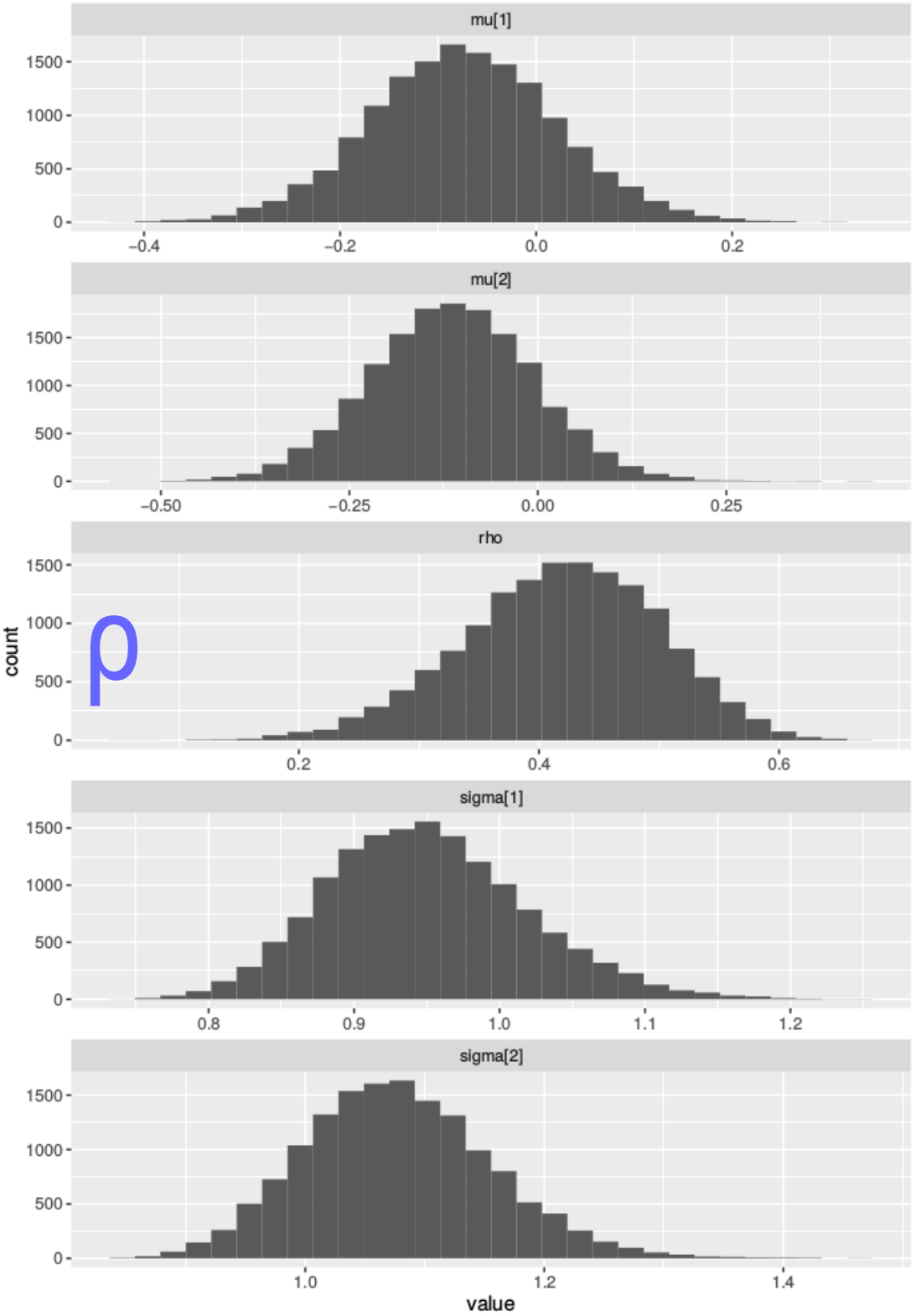




追加スライド

状態空間モデルの
パラメーターの
事後分布（ρ = 0.5）





統計モデリング入門，ここまで…

データの性質・構造をよくみて統計モデルを作る