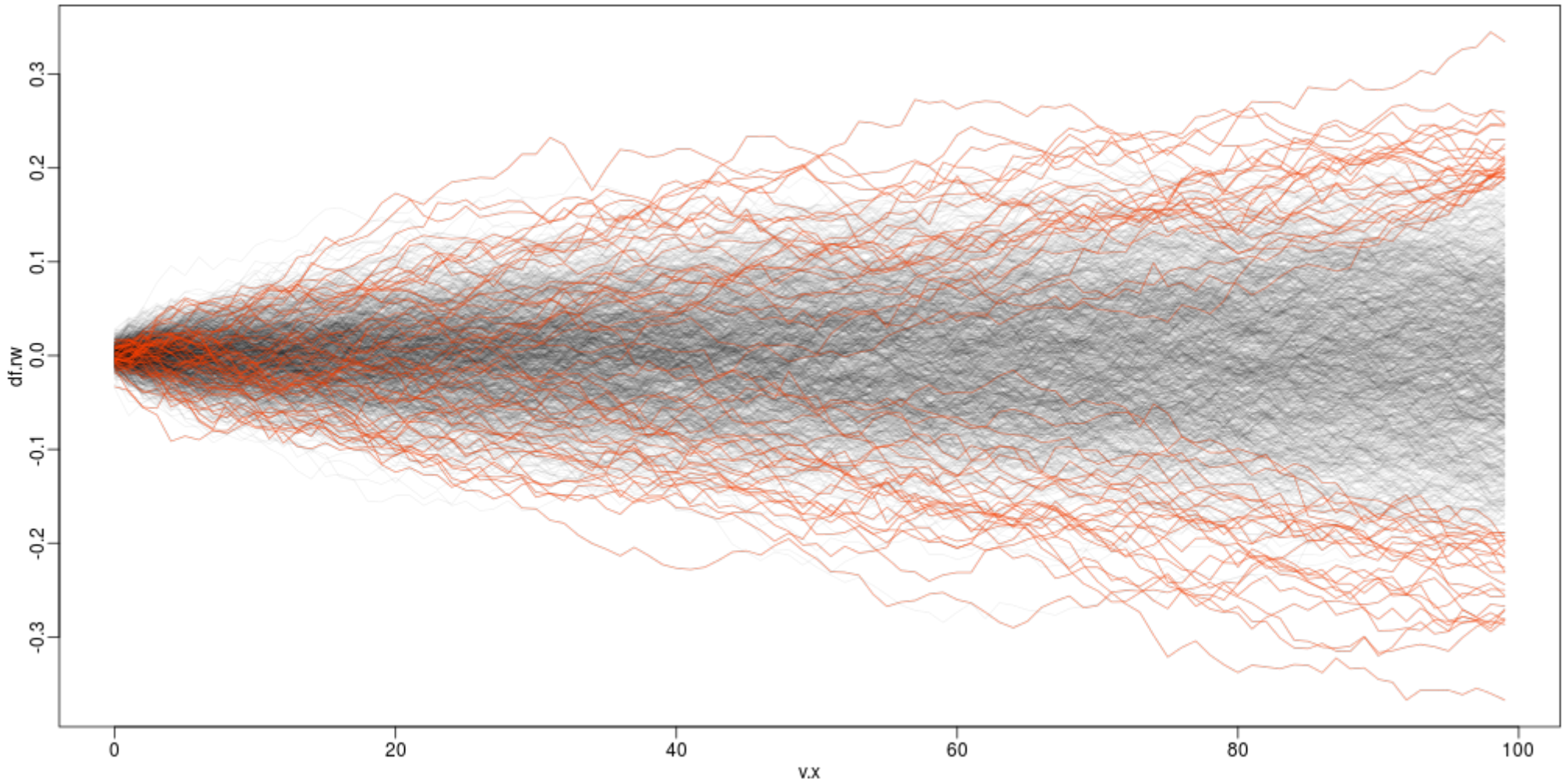
先端科学トピックス

階層ベイズモデル – 時間変化の統計モデリング

久保拓弥 mailto:kubo@ees.hokudai.ac.jp



今回・次回の要点

「あぶない」時系列データ解析は

やめましょう!

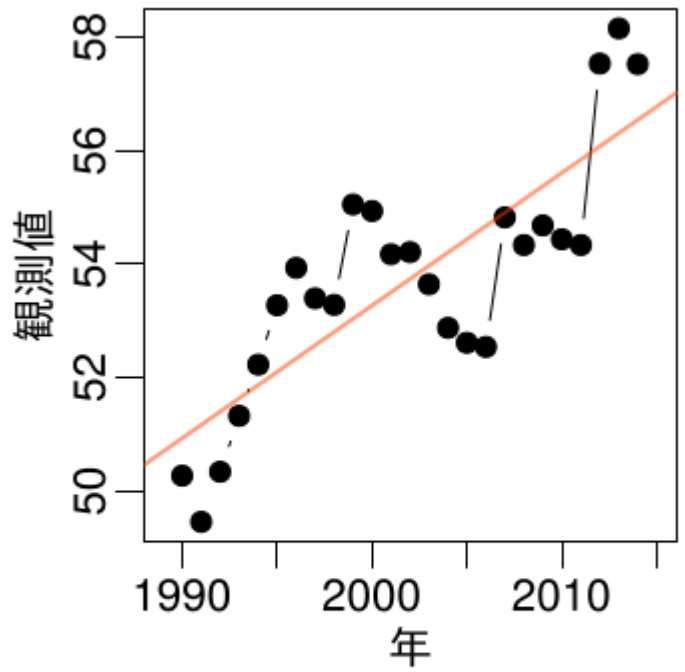
統計モデル
のあてはめ

(危 1) 時系列データの GLM あてはめ

(危 2) 時系列 Y_t ～ 時系列 X_t

各時刻の個体数 ～ 気温 とか
(これは次回)

（危 1）時系列データを GLM で



「ゆーいな傾き」を
ねつぞうする原因

傾きの検定やめて
AIC モデル選択
しても同様になる

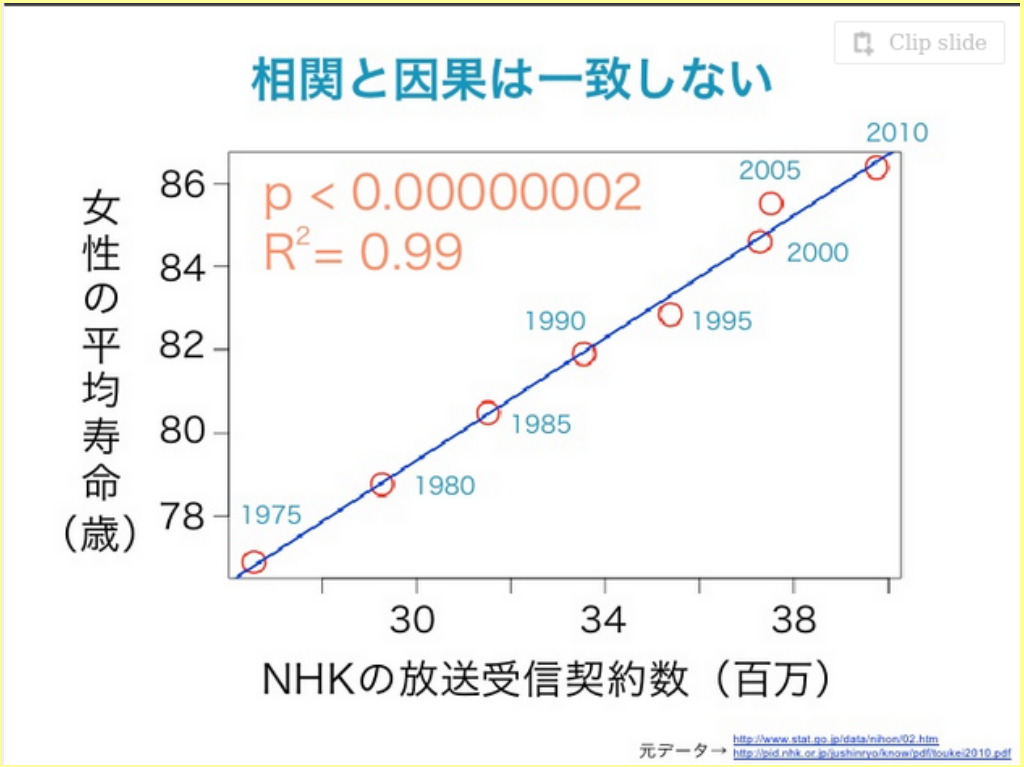
検定とかモデル選択とかそういう問題ではない

統計モデルがおかしい?

（危 2）時系列 Y_t ～ 時系列 X_t

「相関は因果関係ではない」

問題の一部：**にせの回帰**　（これは次回）



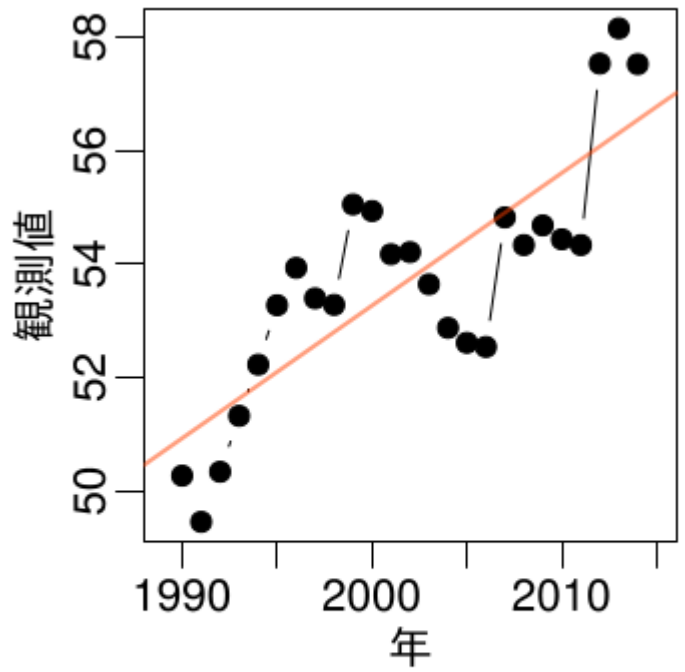
http://www.slideshare.net/takehikoihayashi/ss-13441401

時系列データの統計モデリング

- 安易に「回帰」してはいけない
- ランダムウォークモデルが基本
- 統計モデルが生成する時系列パターンを意識する
- 階層ベイズモデルで推定

状態空間モデル

（危 1）時系列データを GLM で



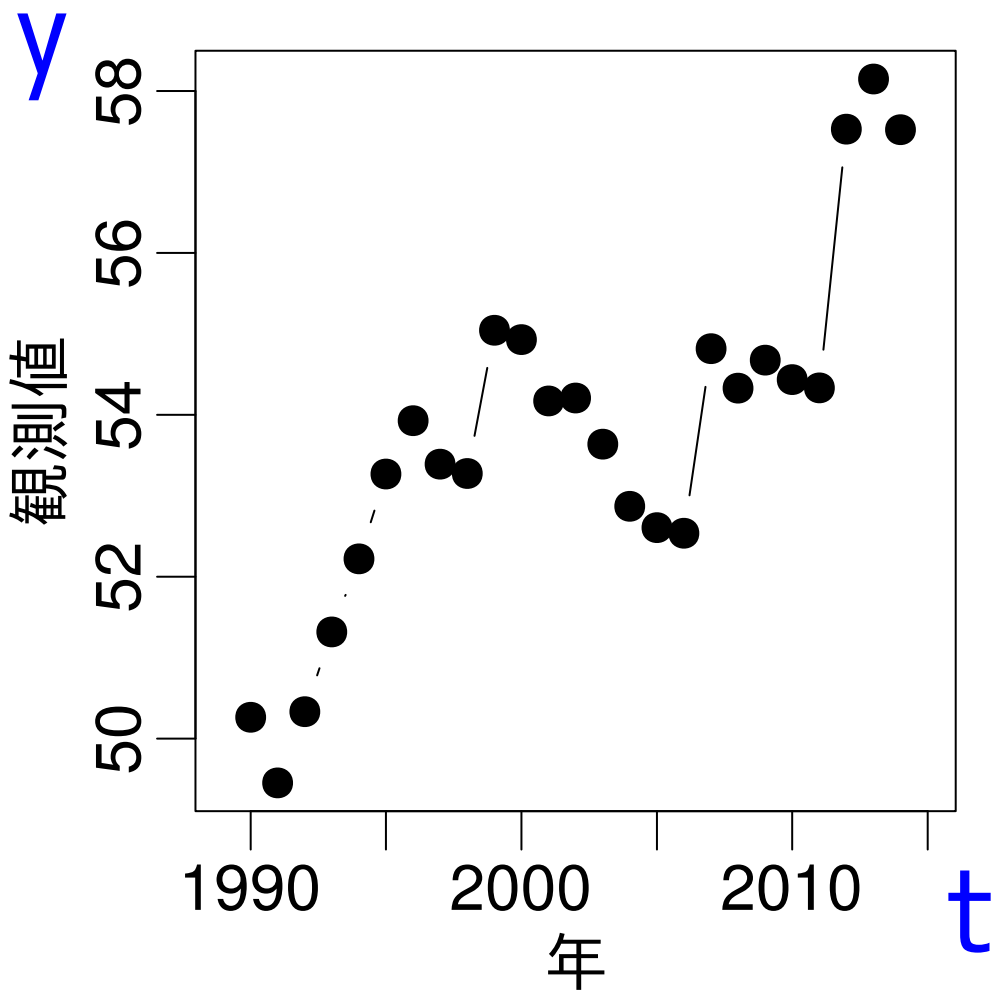
「ゆーいな傾き」を
ねつぞうする原因

傾きの検定やめて
AIC モデル選択
しても同様になる

検定とかモデル選択とかそういう問題ではない

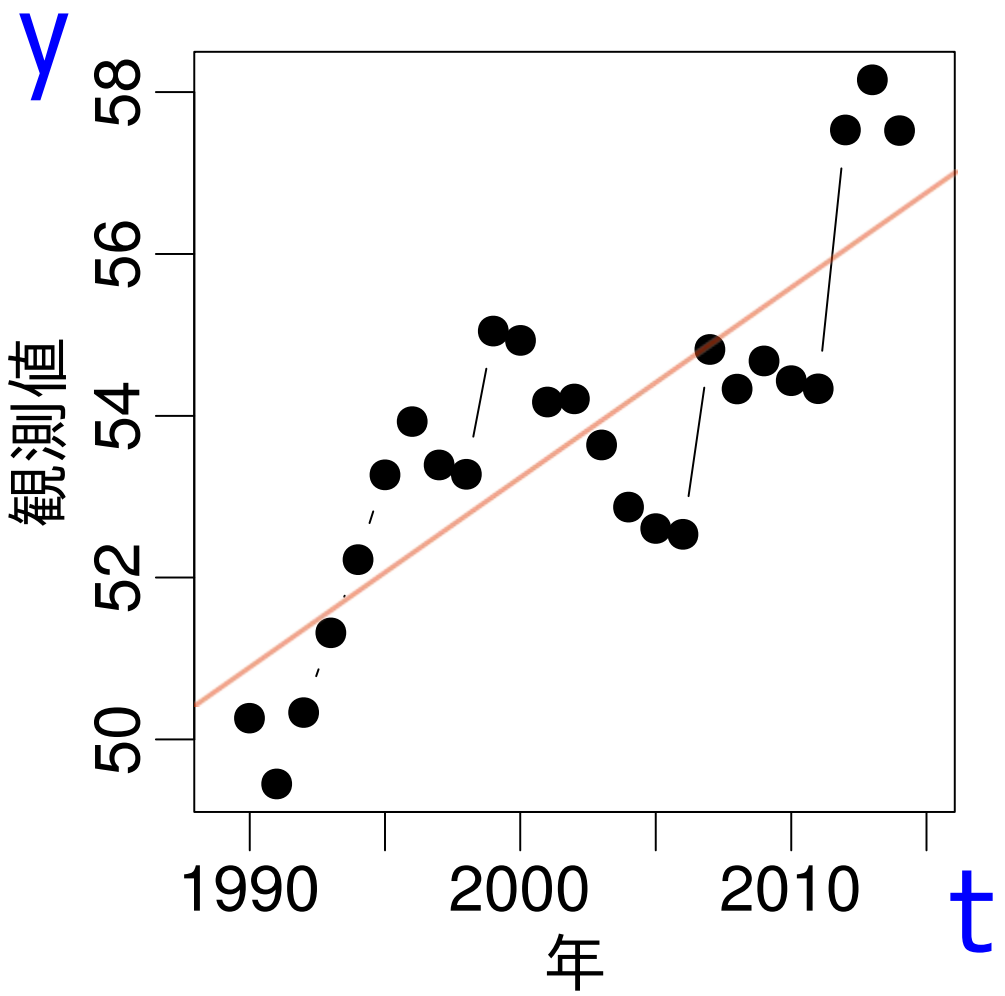
統計モデルがおかしい?

このような時系列データがあったとしましょう



y は何か連続値と
しましょう
(今日でてくる y は
連続値ばかり，と
いうことで)

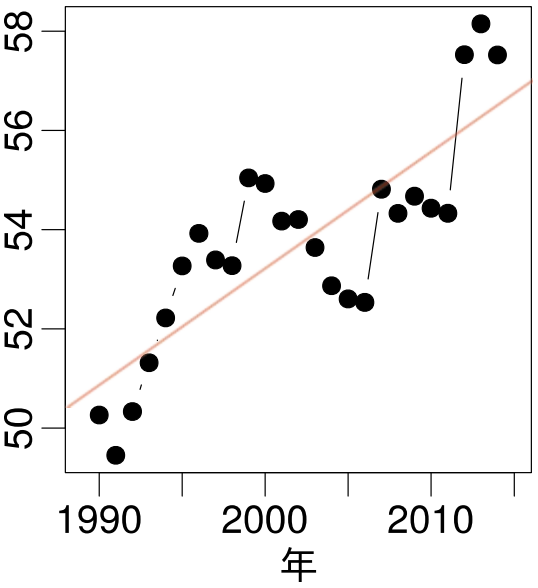
時系列データの統計モデリング入門



glm(y ~ t)

…とモデル
をあてはめてみた

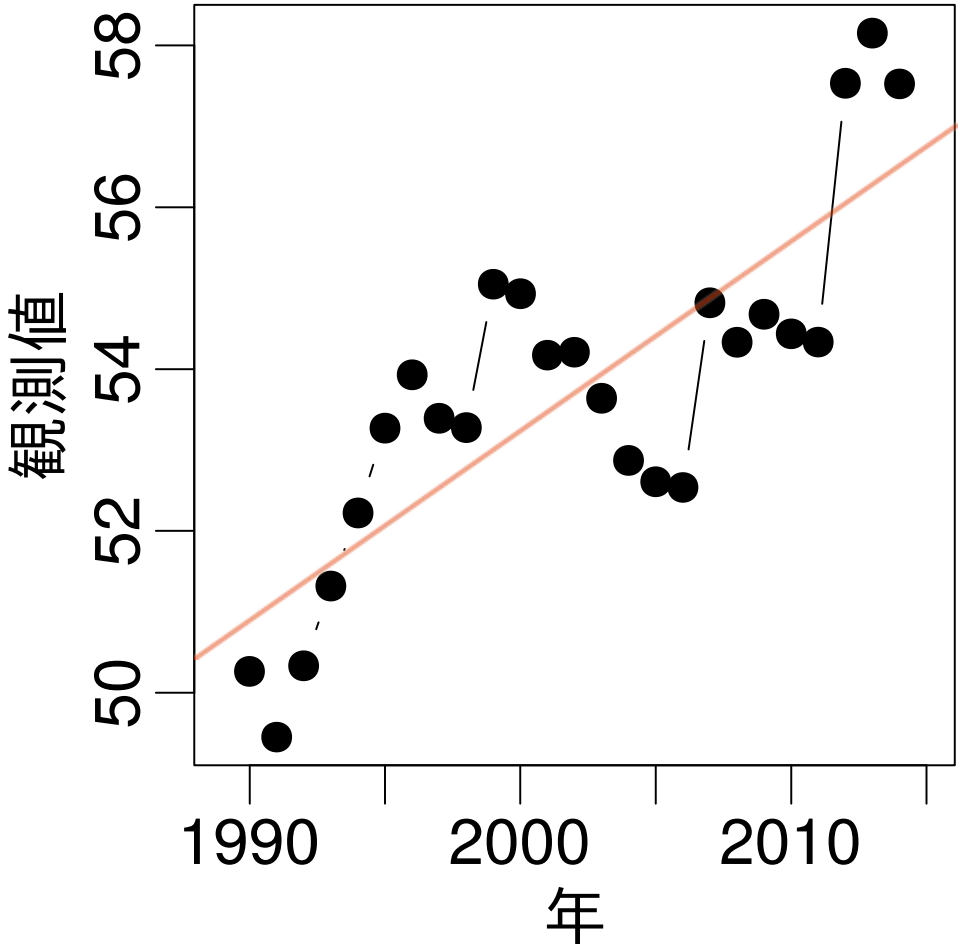
「やったーゆーいだ!!」……??




```
> summary(glm(formula = y ~ t))

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.1295  -1.0583  -0.0817   0.9860   2.0188

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -414.5655    71.4761   -5.80  6.6e-06
t              0.2339     0.0357    6.55  1.1e-06
```

これはまちがい→ glm(時系列Y ~ 時間 t)

時系列の各点は独立ではない



「ゆーいな傾き」(偽)

が「ぞろぞろ」でます

傾きの検定やめて

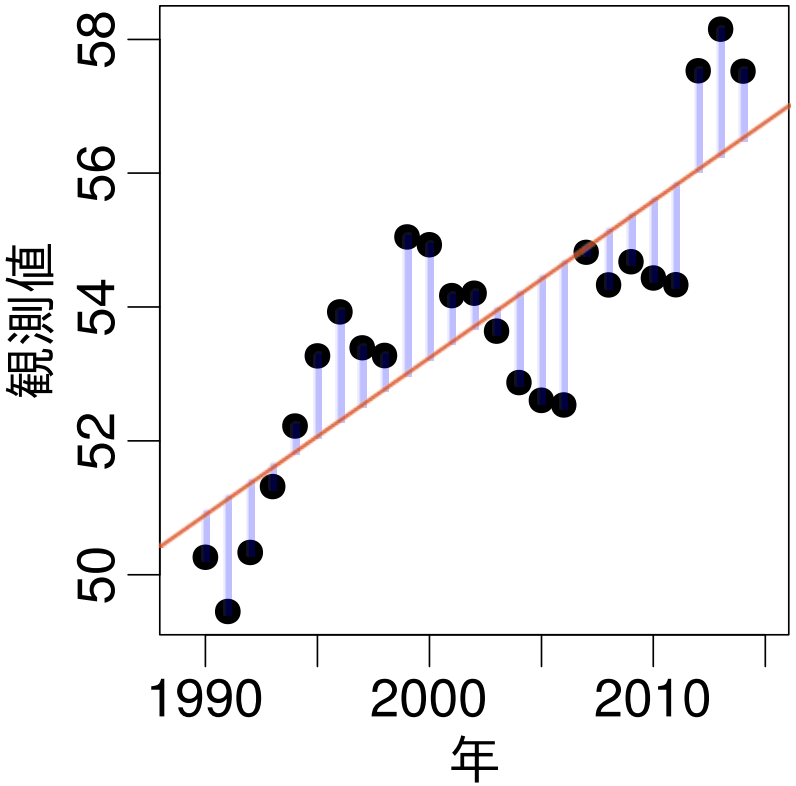
AIC モデル選択

しても同様になる

検定とかモデル選択とかそういう問題ではない

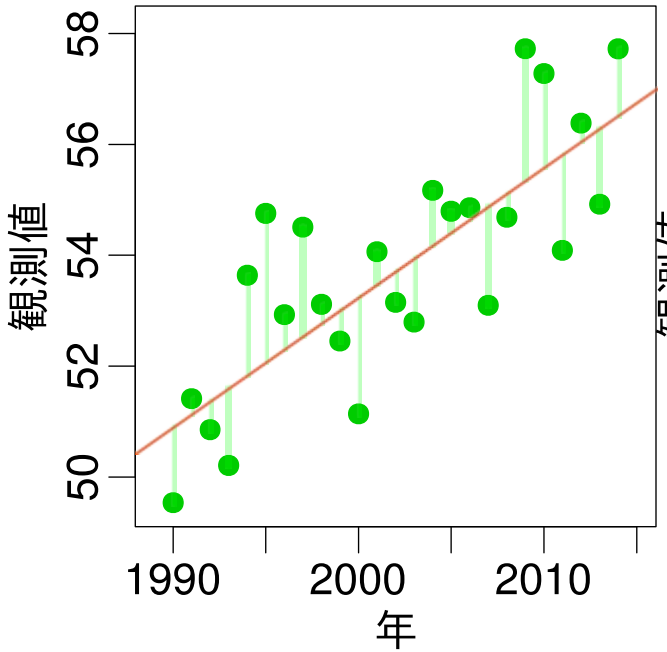
統計モデルがおかしい?

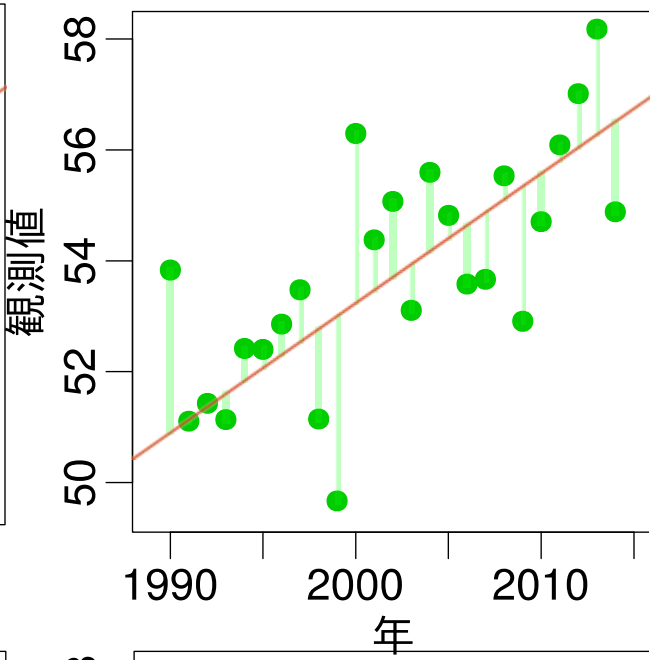
時系列の「ずれ」

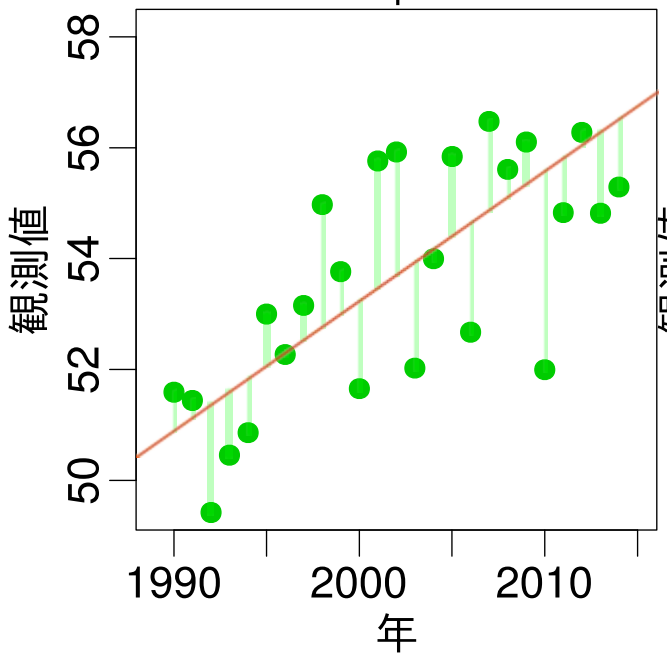


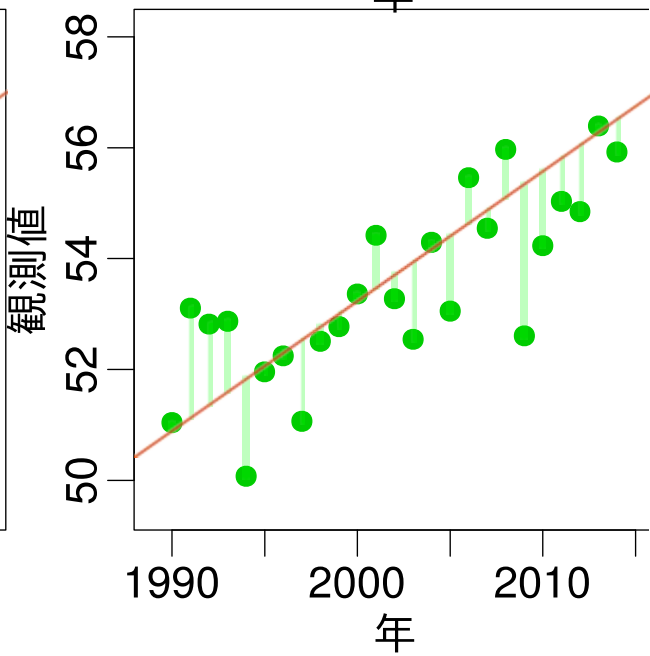
ずれかたが
ちがってる?

GLM のずれ

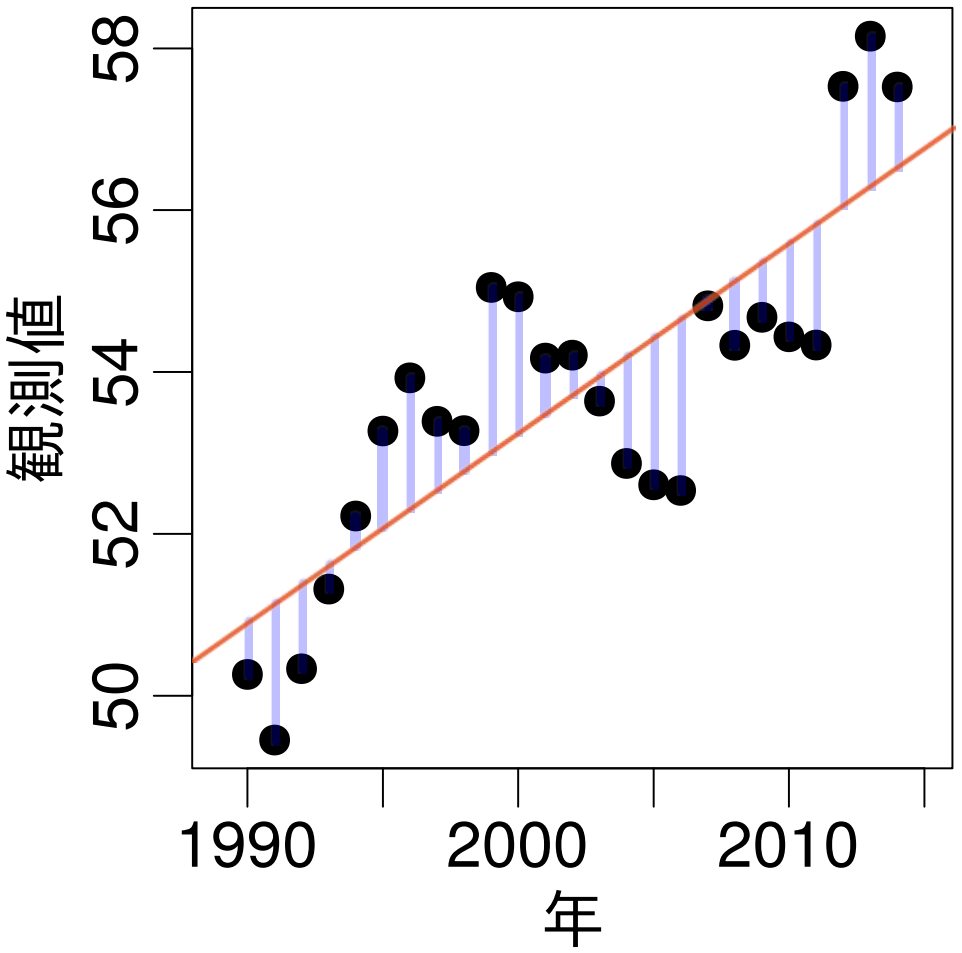




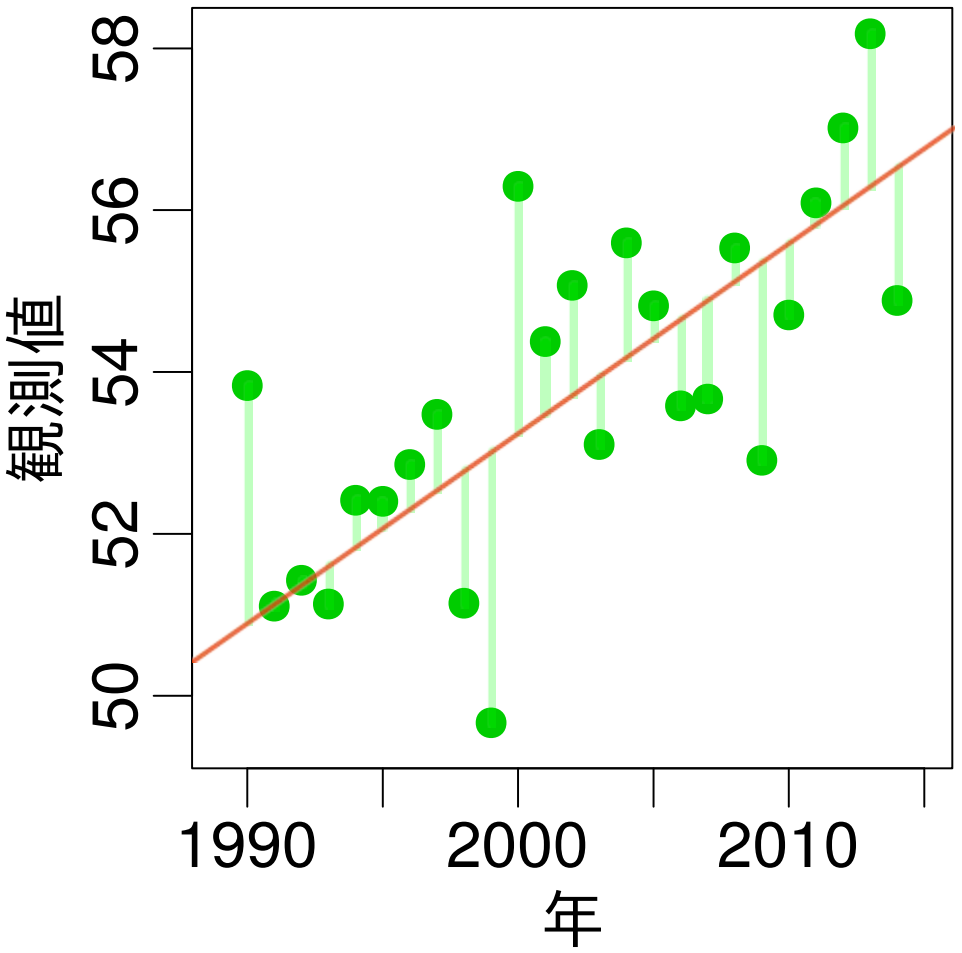




時系列の「ずれ」



GLM のずれ



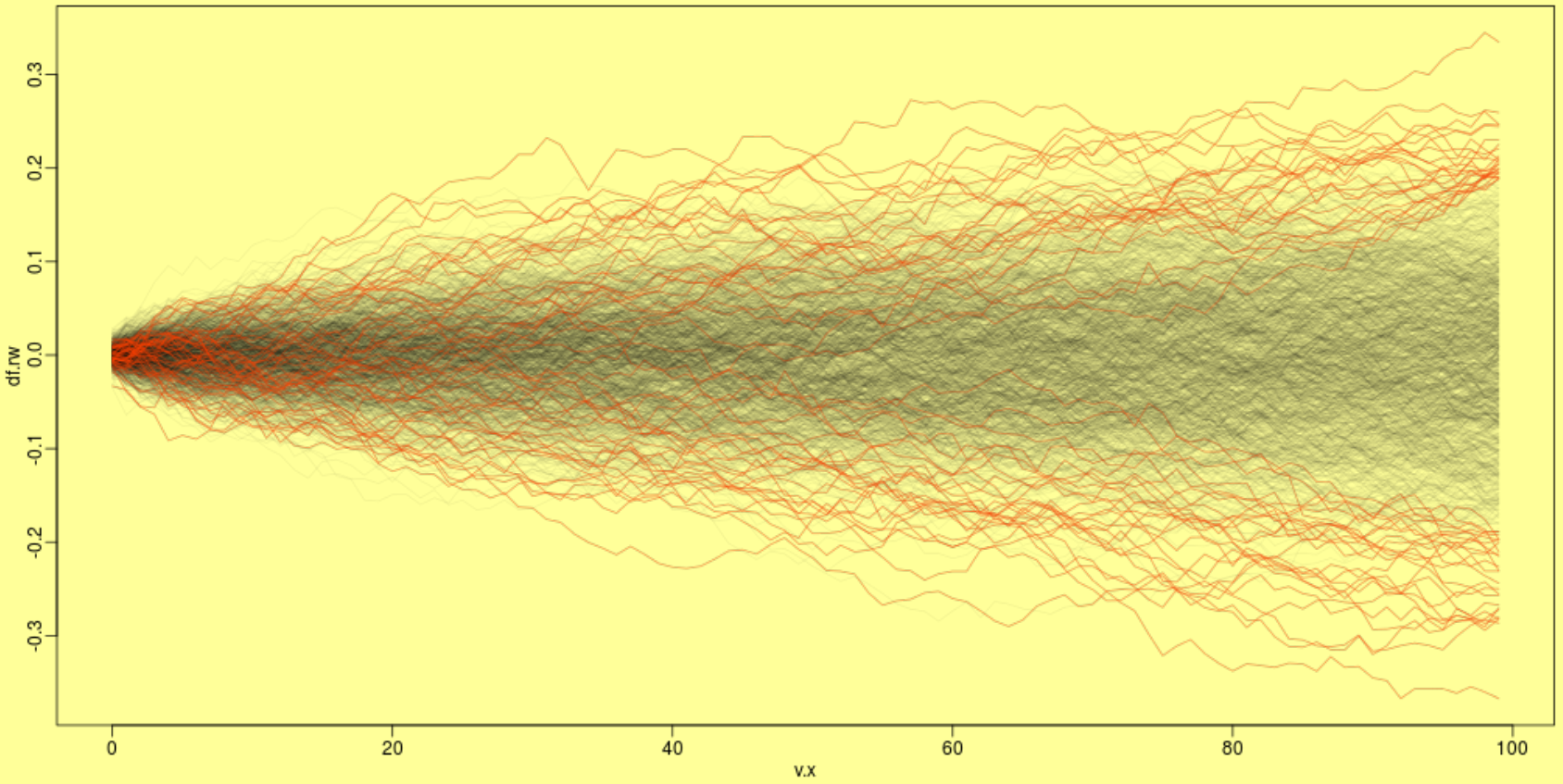
直線からのずれがちがう!

時間的自己相関がある

時間的自己相関がない

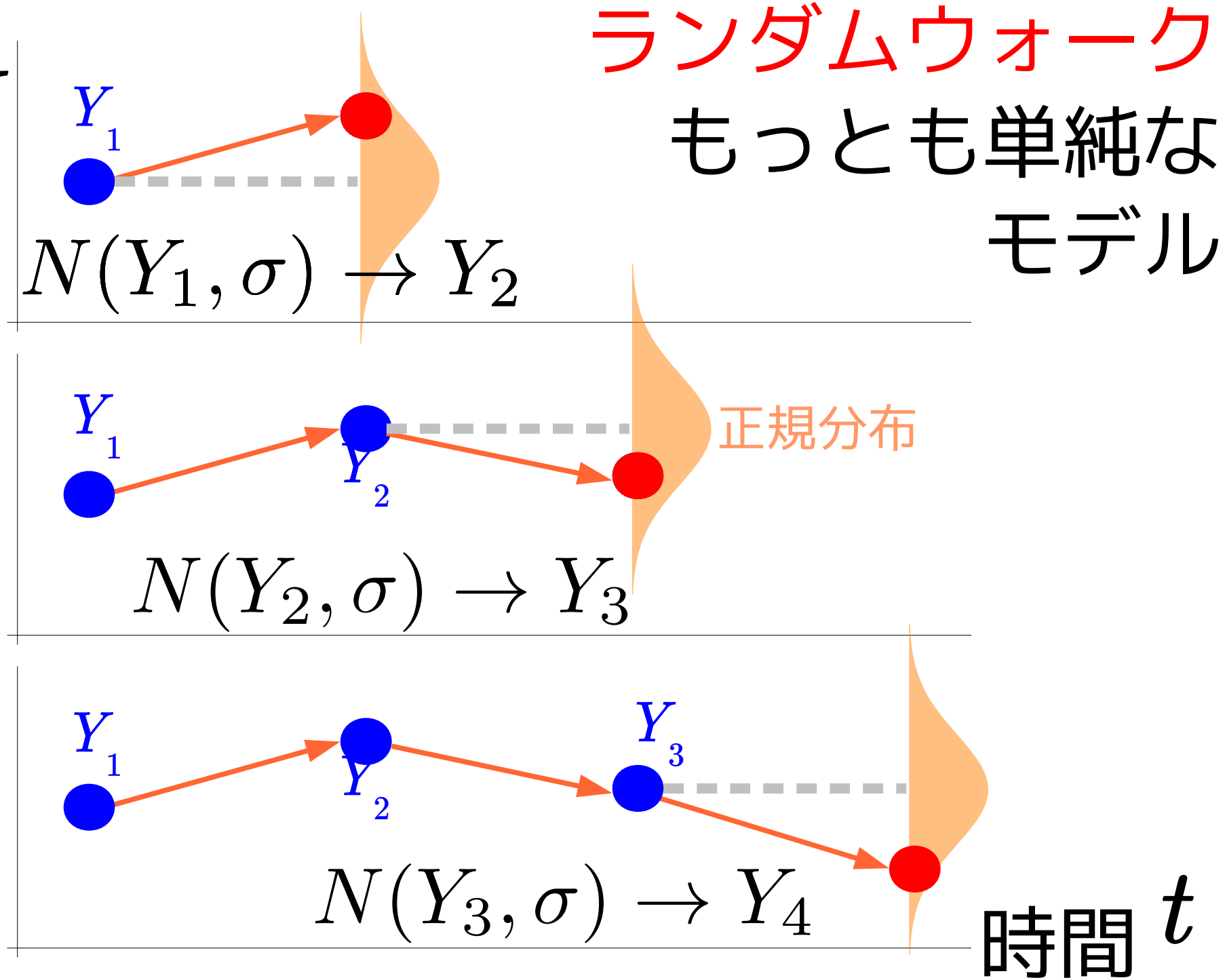
時系列の基本モデルのひとつ

ランダムウォーク（乱歩）



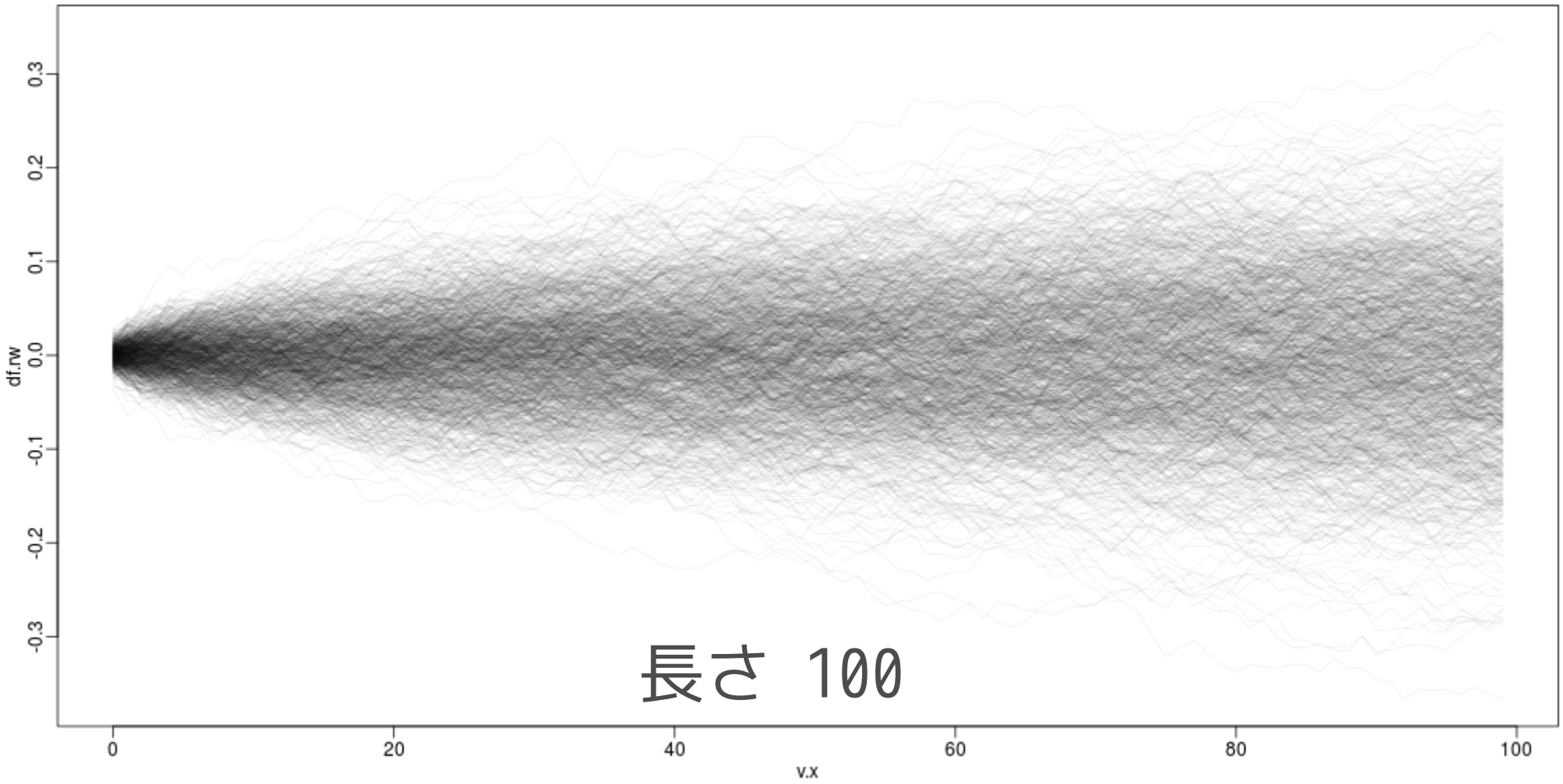
ランダムウォーク

もっとも単純なモデル



ランダムウォークなサンプル時系列

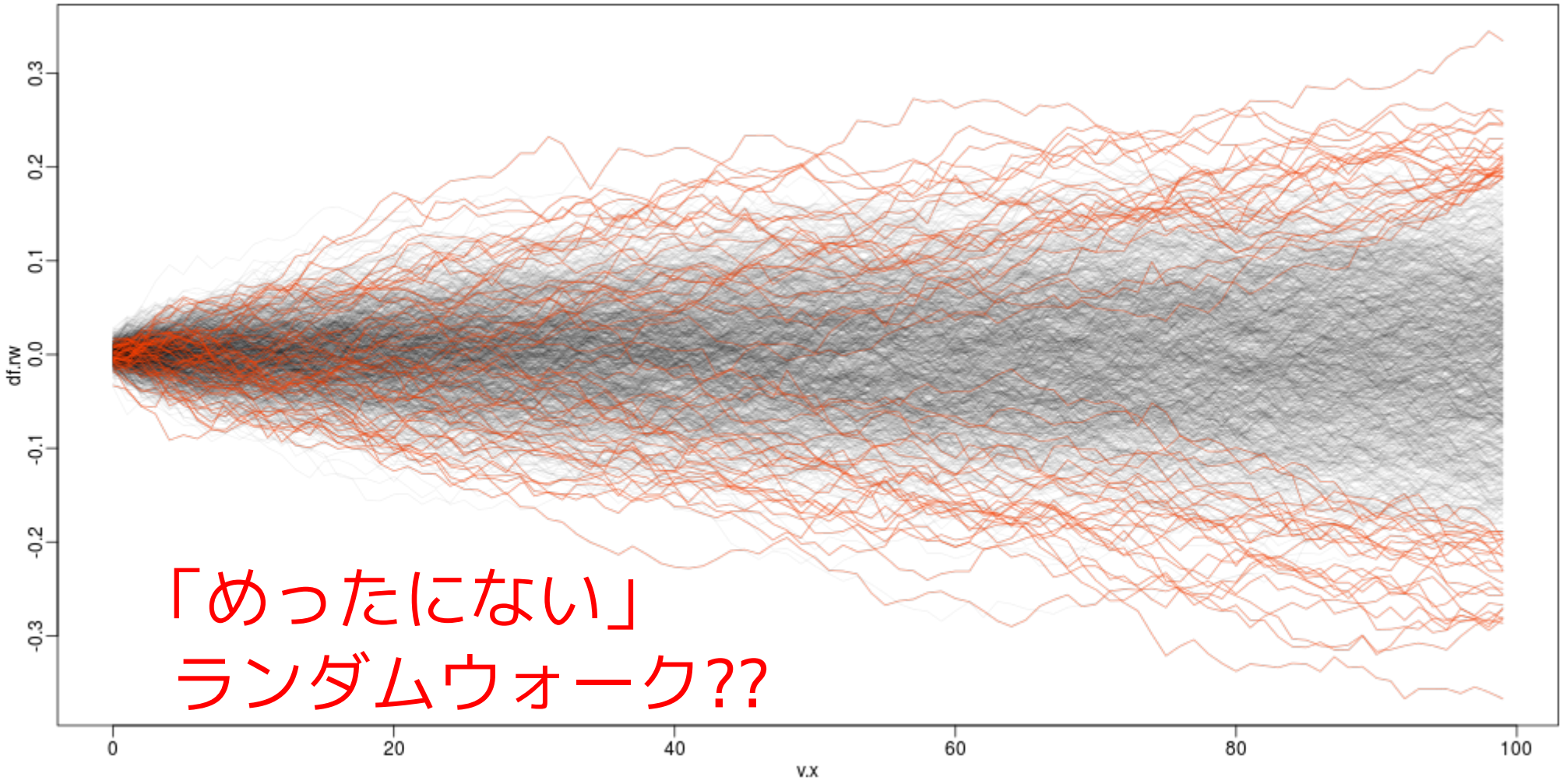
とりあえず 1000 本ほど生成してみました



長さ 100

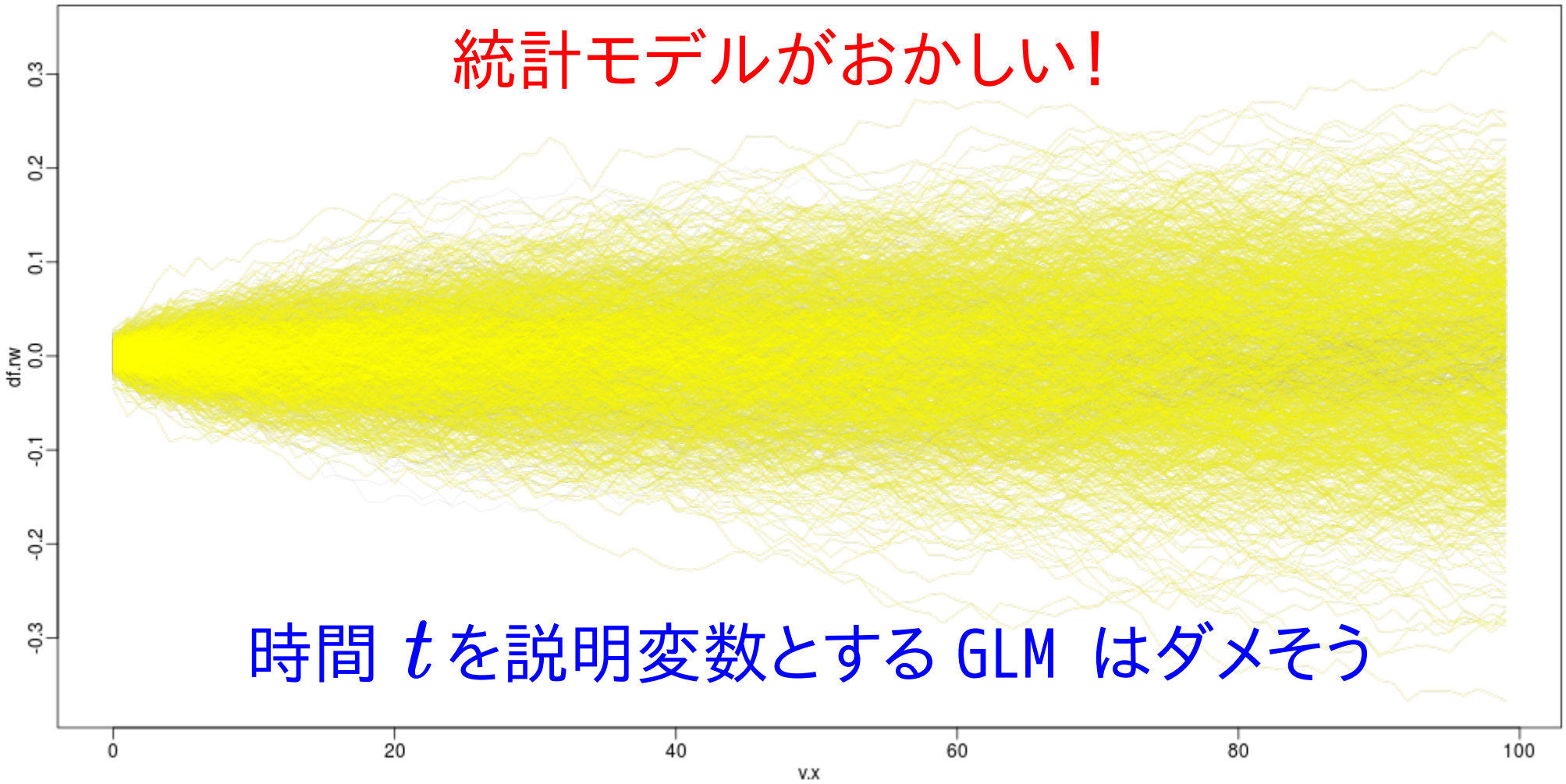
例外的な時系列というのはありえる

たとえば $t = 100$ でかなり外れている 50 本



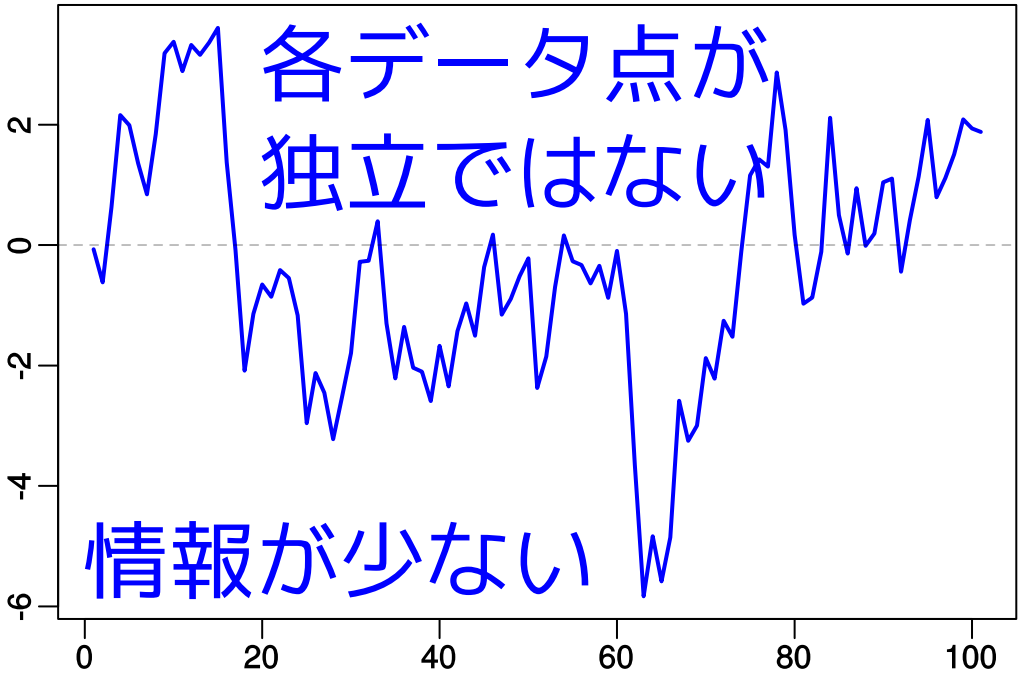
しかし直線回帰 GLM あてはめると…

ほとんどすべての場合で「ゆーい」！

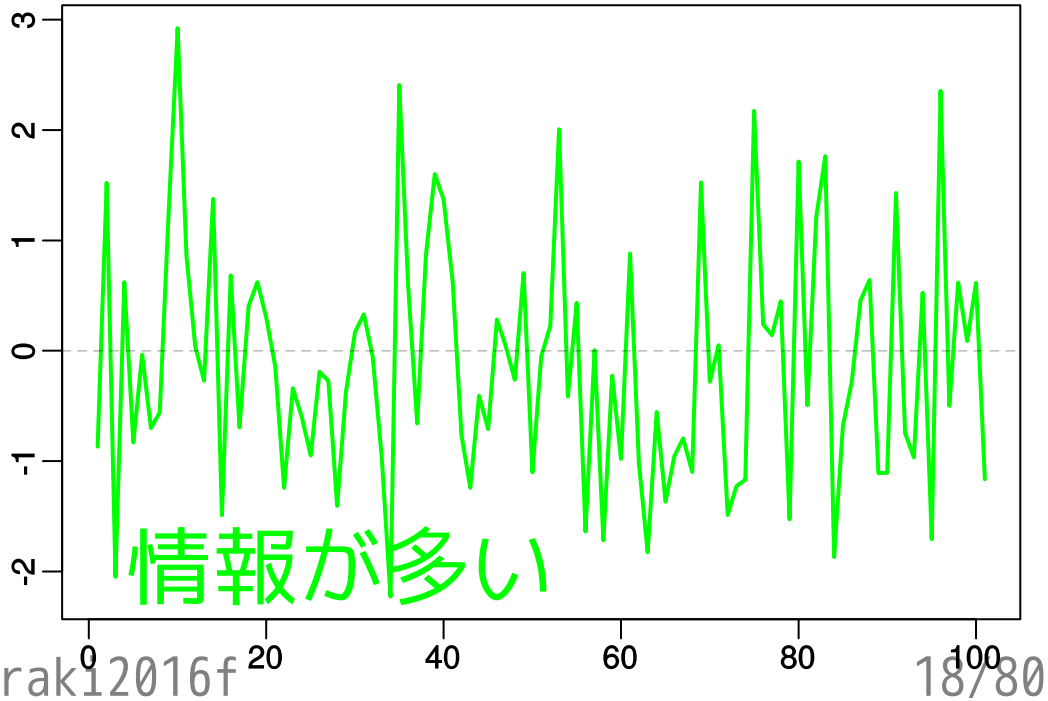


ちょっとでも傾いてたら「ゆーい」

実際には
こんなデータ
なのに



R の glm() は
こんなデータ
だとみなしている



時間的自己相関

（略称:自己相関，時間相関）

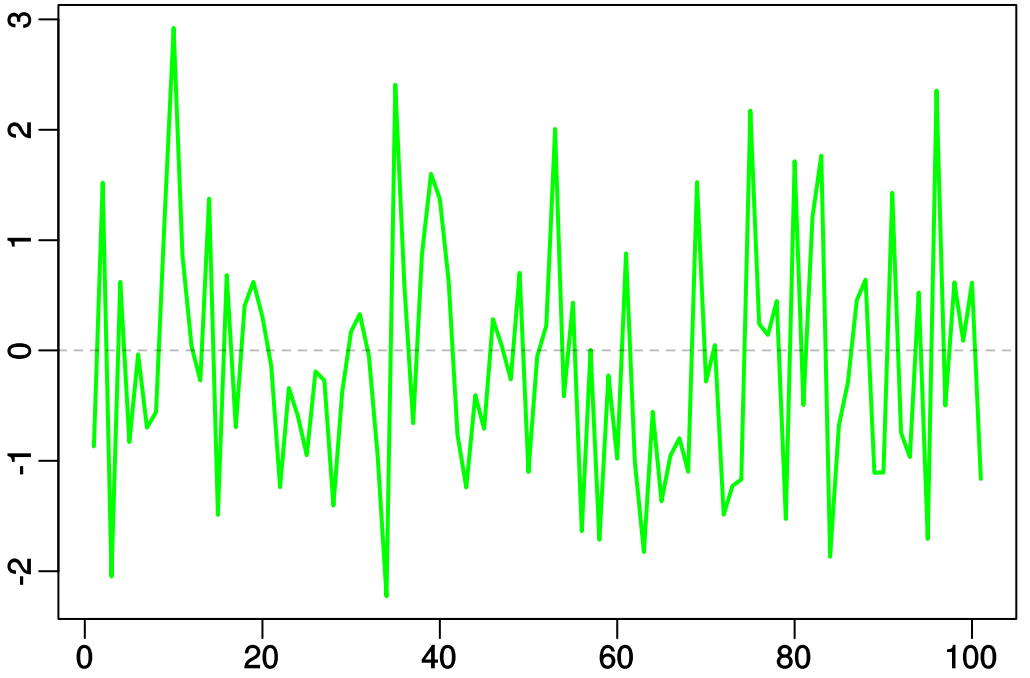
を調べたらいいの?

$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(y_t) \cdot \mathrm{Var}(y_{t-1})}}$$

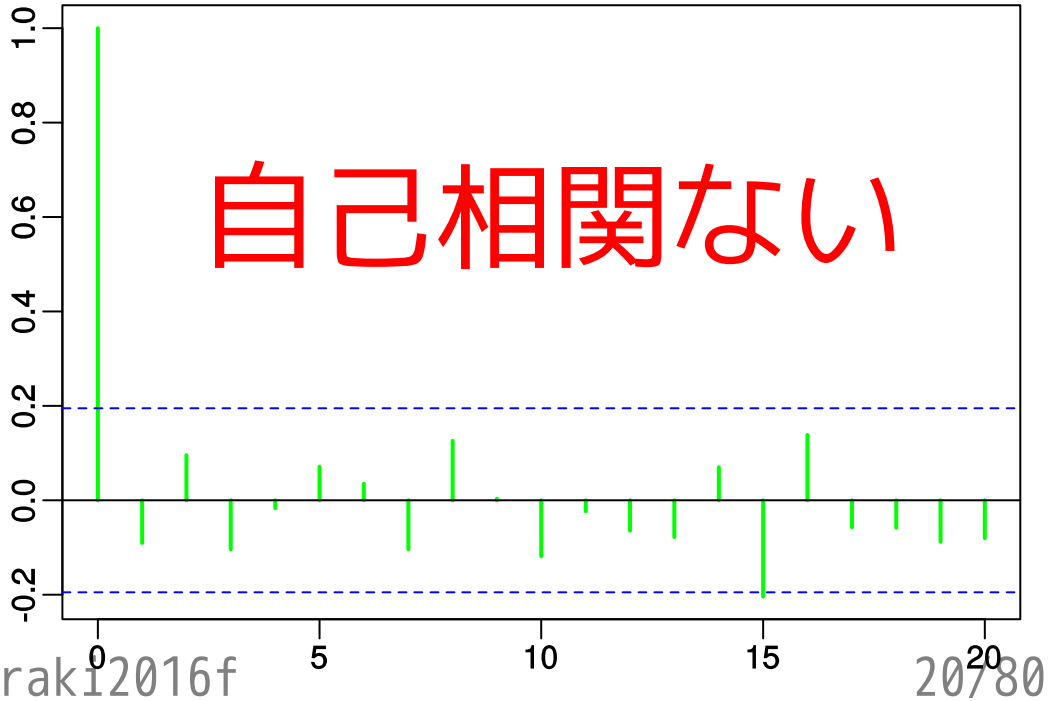
R の ts クラス: 時系列をあつかう

```
plot(ts(Y))
```

これはたんなる
100 個の正規乱数



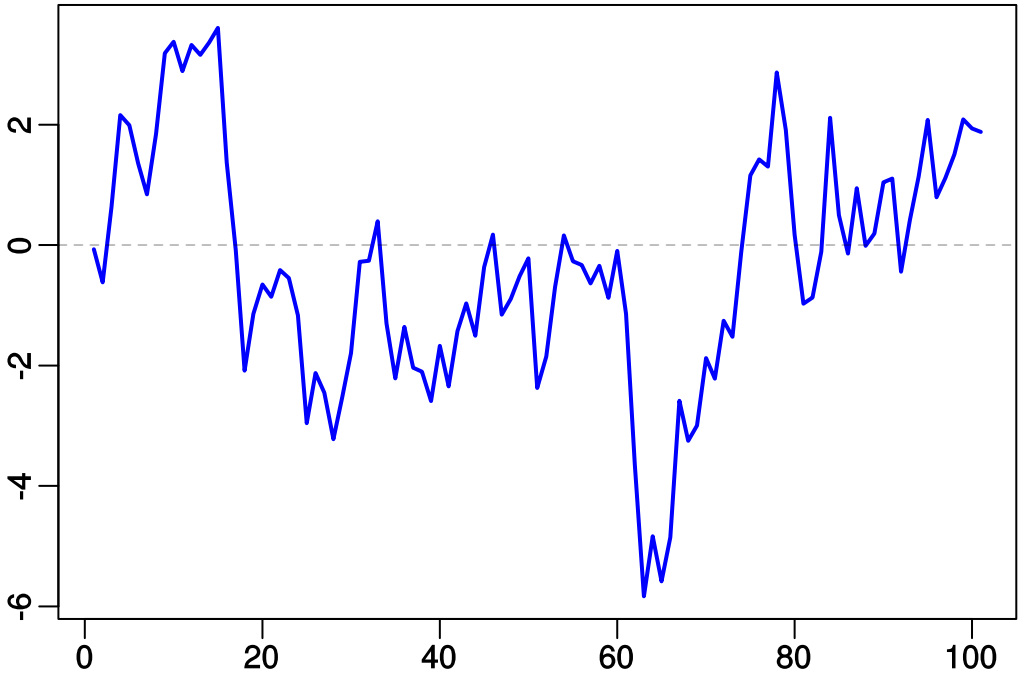

```
plot(acf(ts(Y)))
```



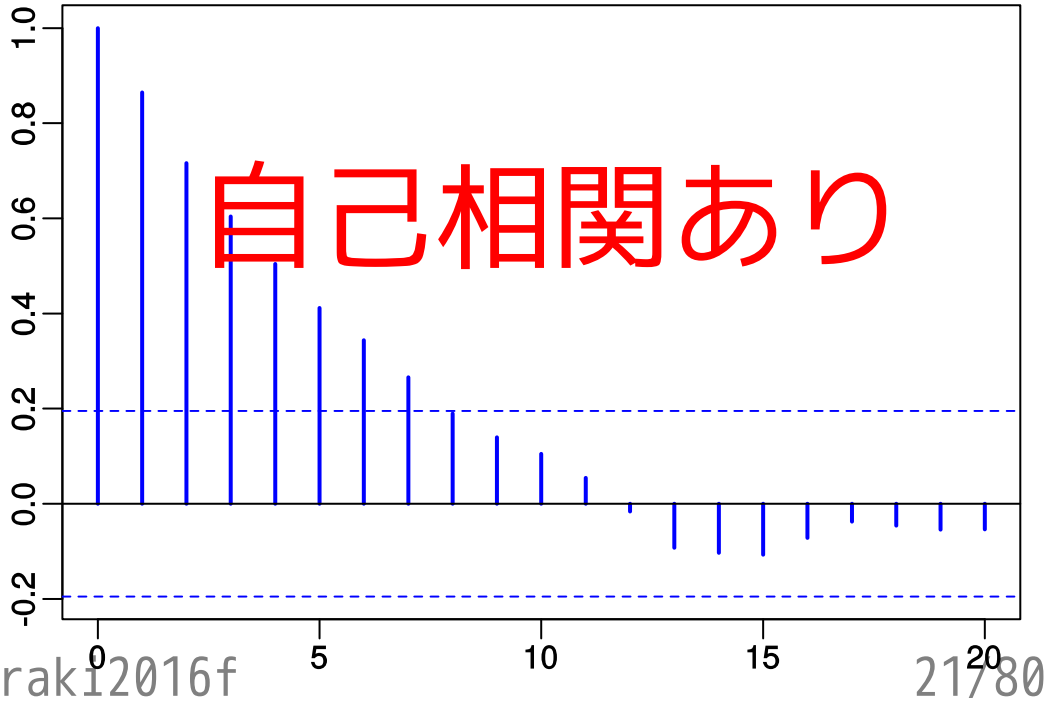
自己相関ない

自己相関減衰の様子を図示

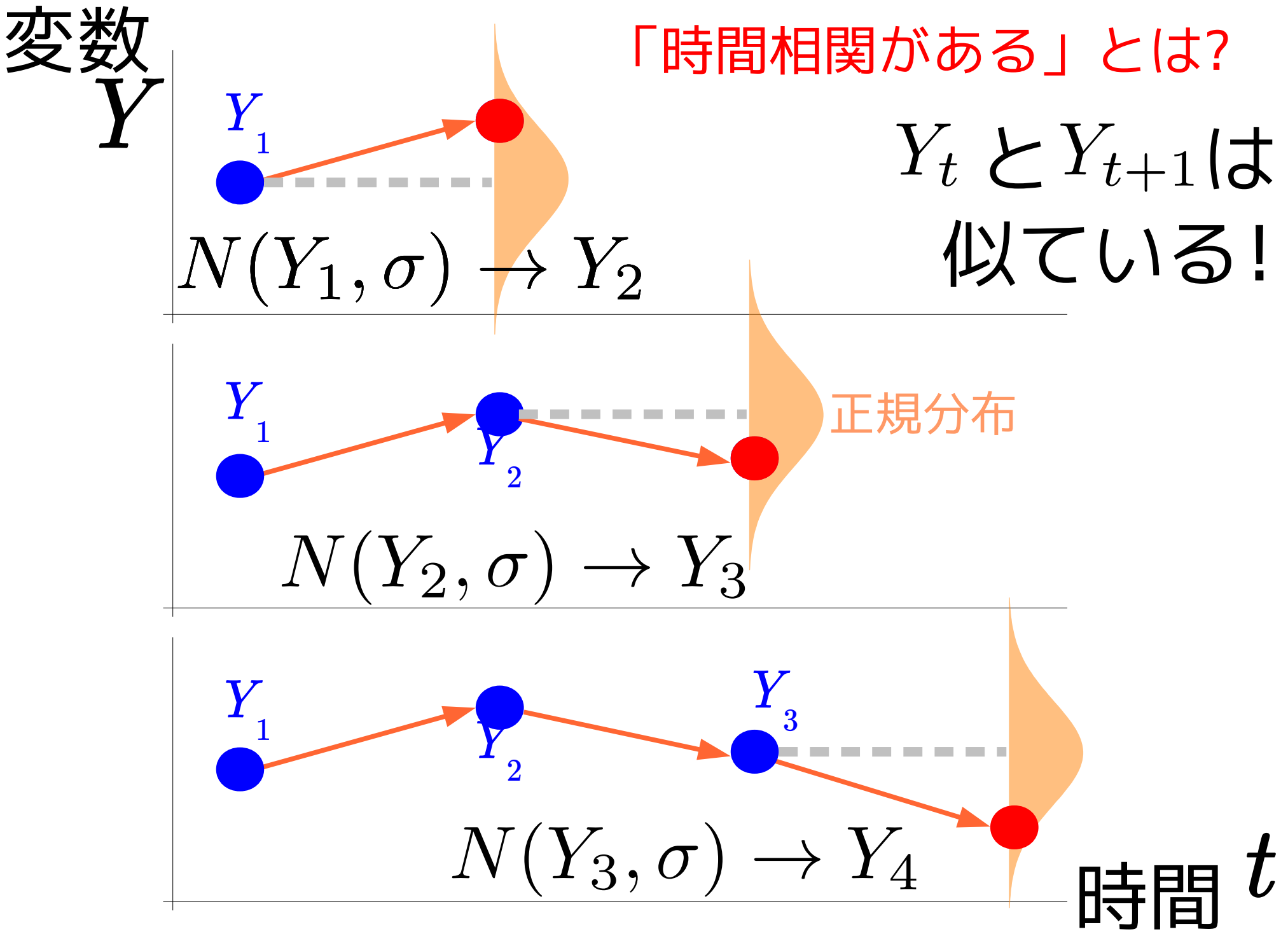
```
plot(ts(Y))
```




```
plot(acf(ts(Y)))
```

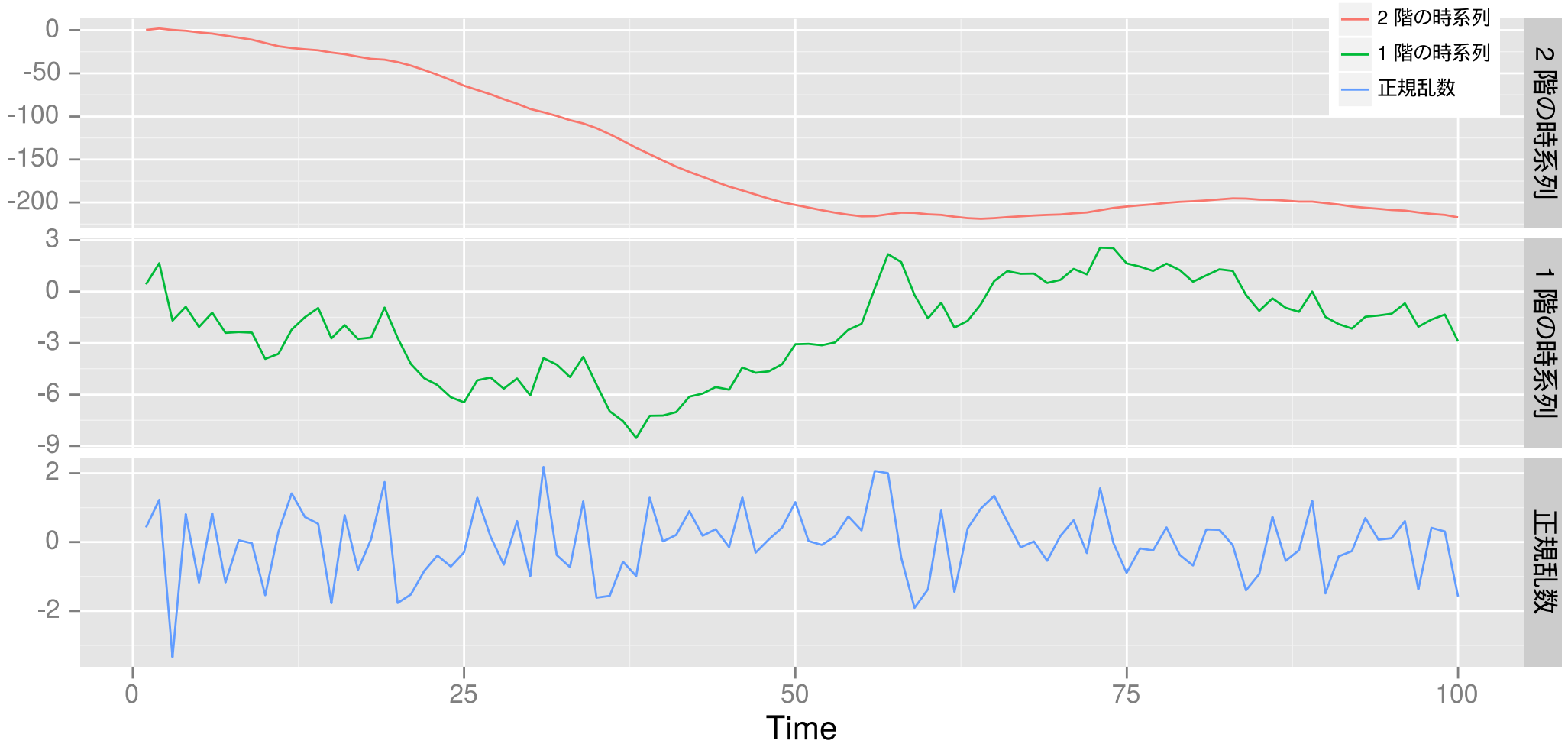


自己相関あり


変数 Y
「時間相関がある」とは?
Y_t と Y_{t+1} は
似ている!
Y_1
$N(Y_1, \sigma) \to Y_2$
Y_2
正規分布
$N(Y_2, \sigma) \to Y_3$
Y_3
$N(Y_3, \sigma) \to Y_4$
時間 t

時系列データの「差分」をみよう

自己相関係数もいいけど差分を調べるのが基本



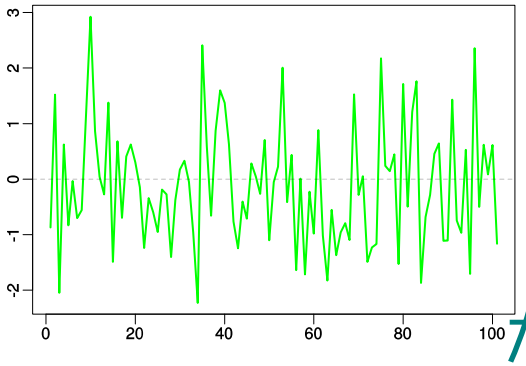
時間的自己相関

いつも役にたつわけではない?

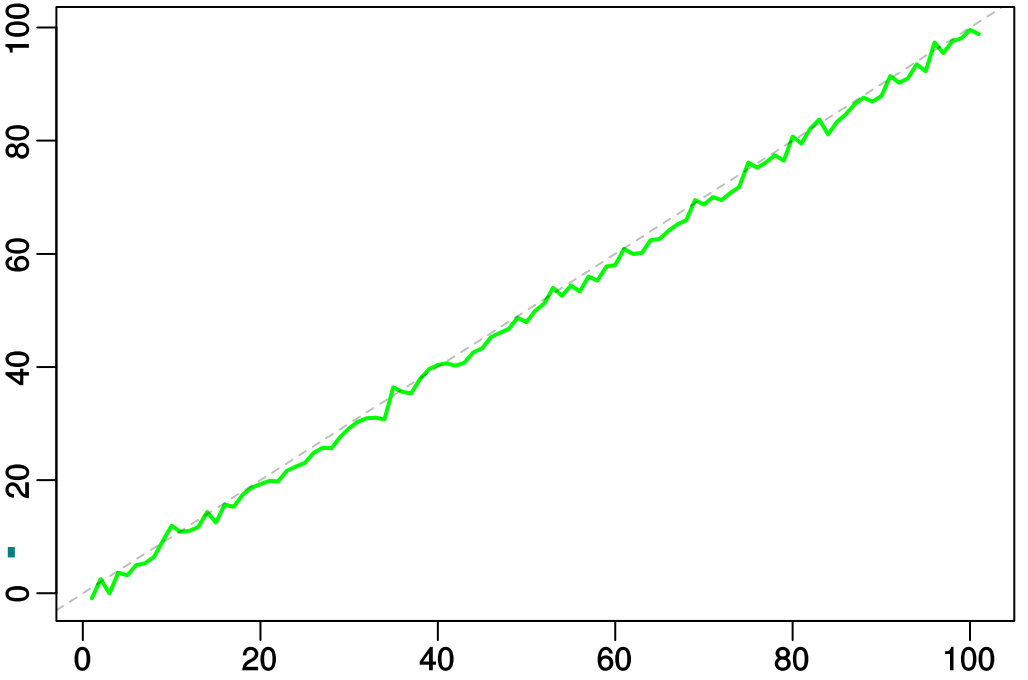
$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{Var}(y_t) \cdot \mathrm{Var}(y_{t-1})}}$$

各点独立のデータをナナメにすると?

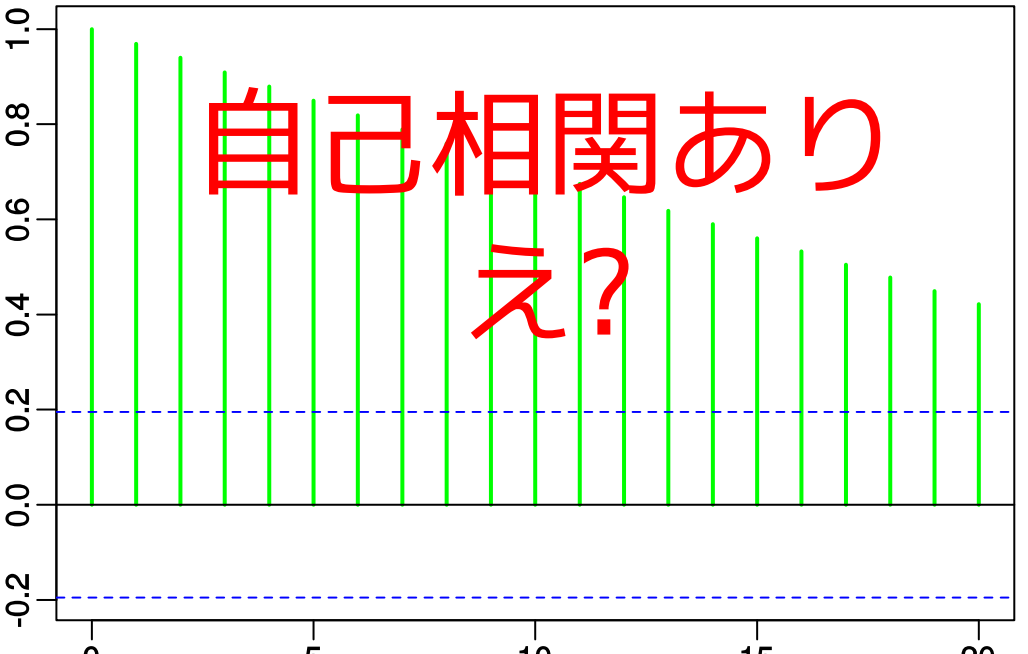
```
plot(ts(Y))
```



これを
ナナメに
したもの
なんだけど…



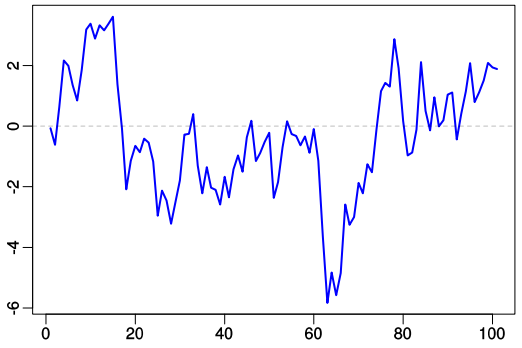

```
plot(acf(ts(Y)))
```



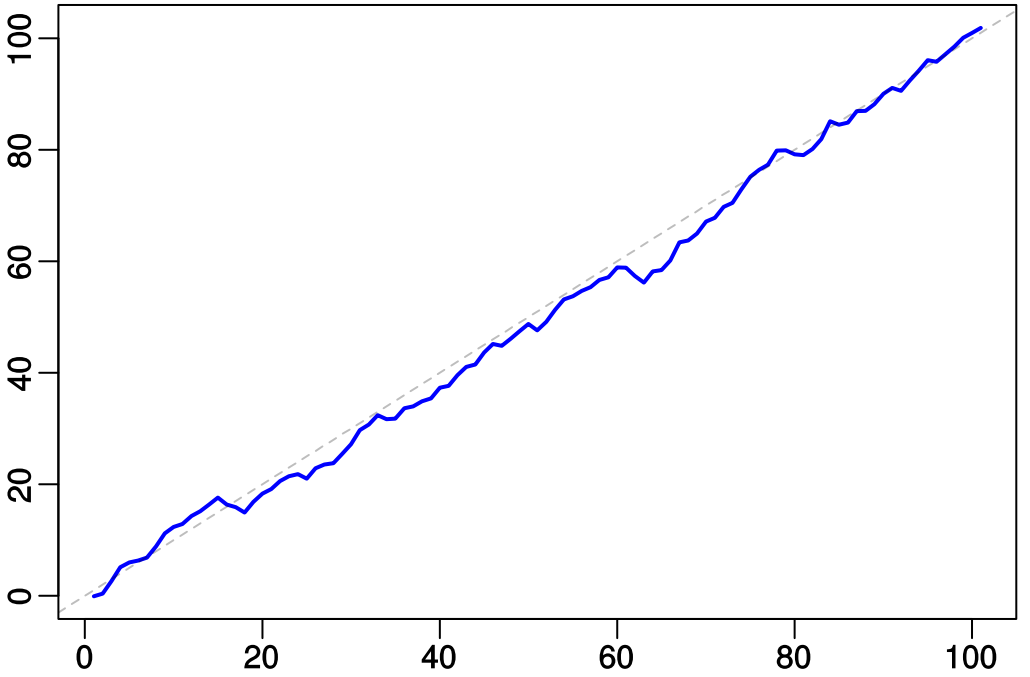
自己相関あり
え?

各点独立のデータをナナメにすると?

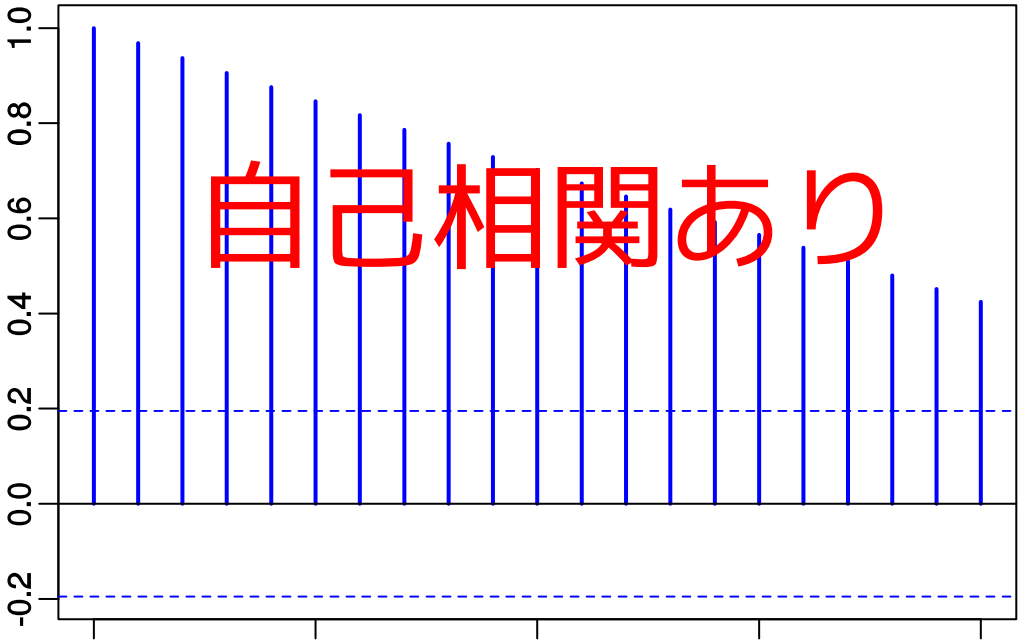
```
plot(ts(Y))
```



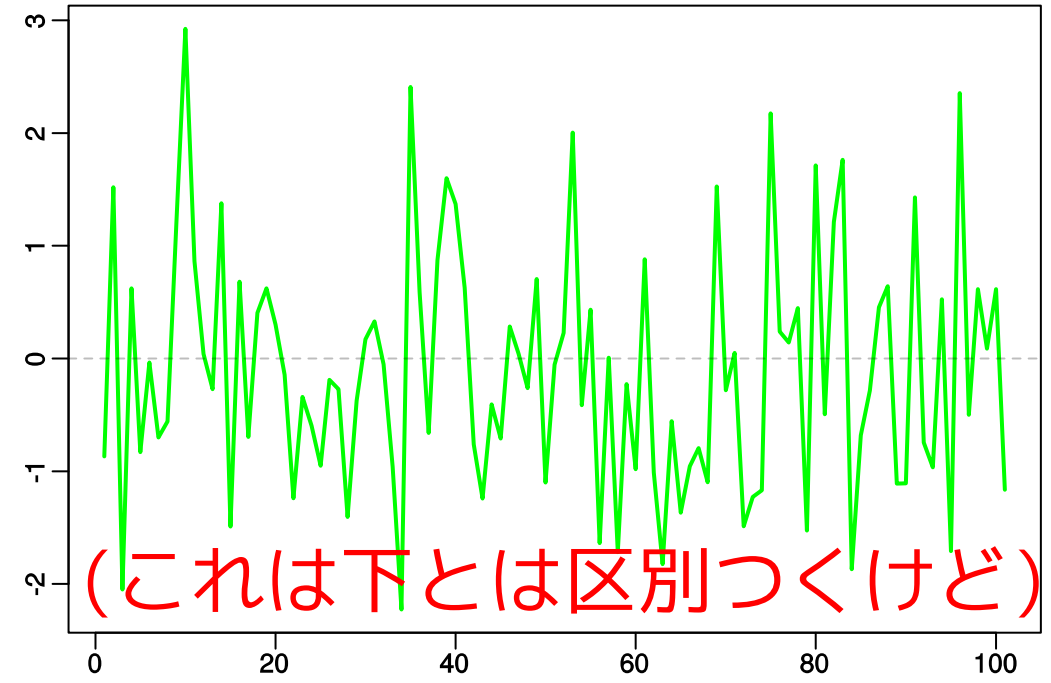
これを
ナナメに
したもの

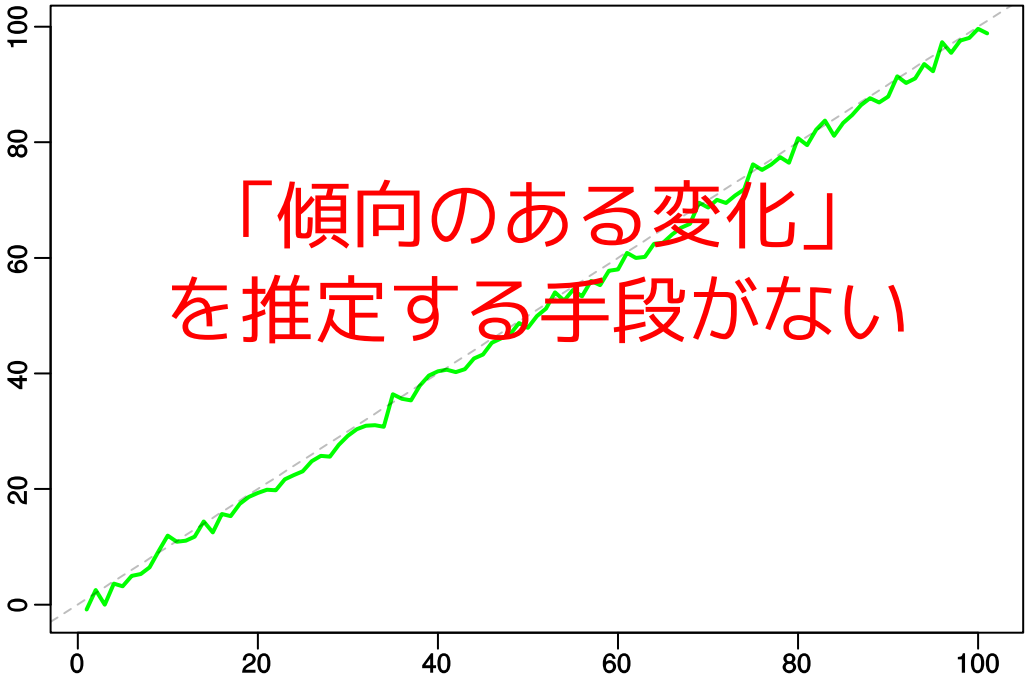


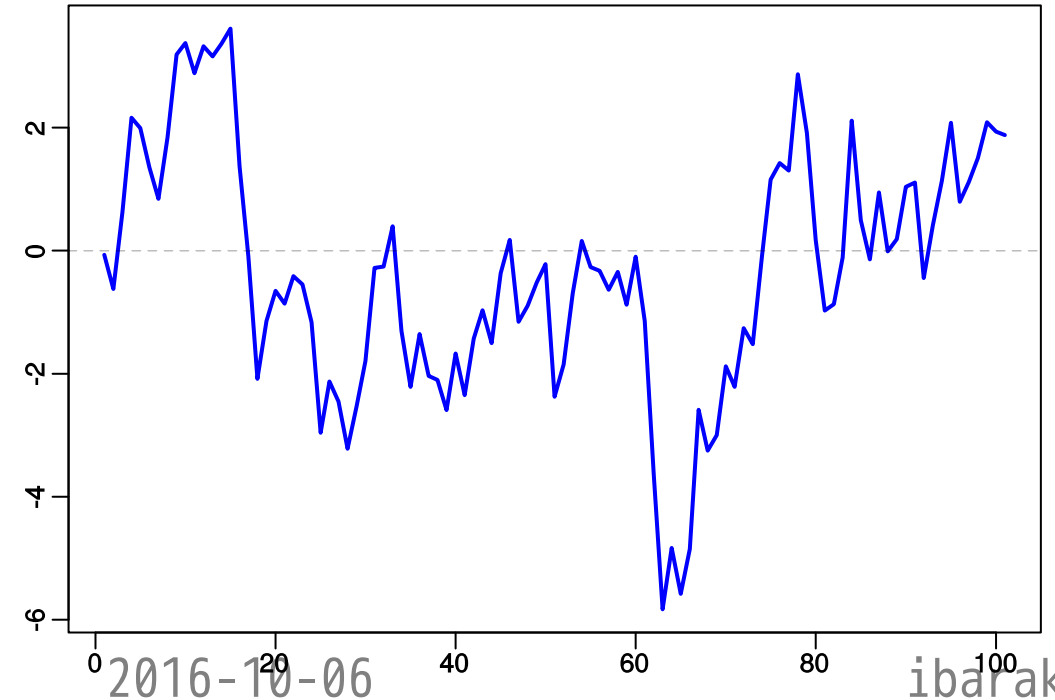

```
plot(acf(ts(Y)))
```

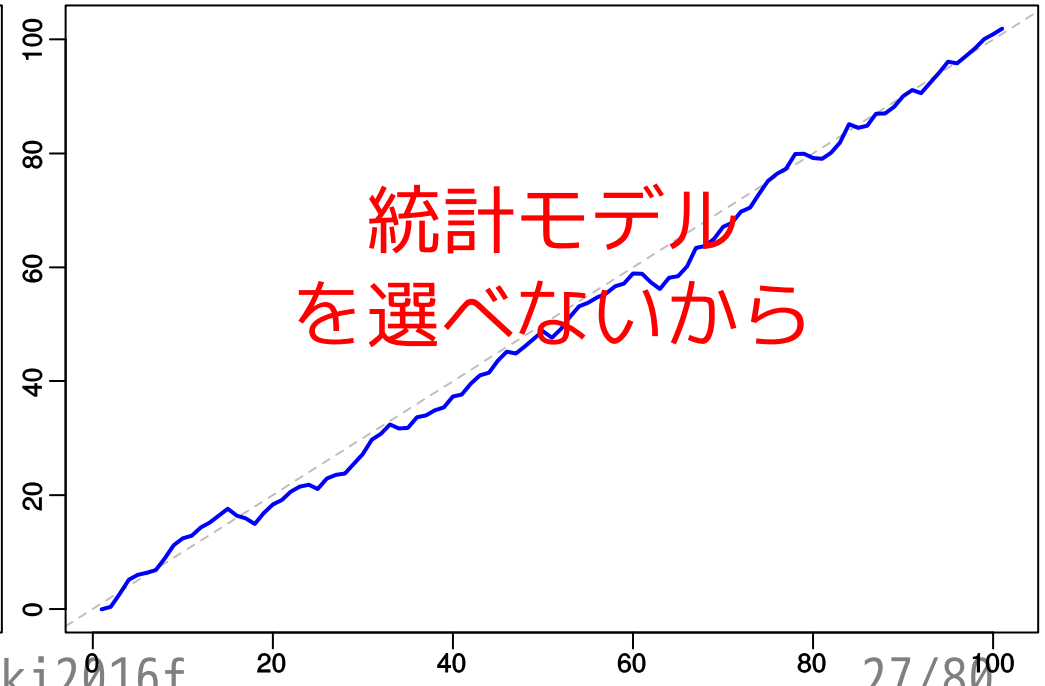


自己相関係数みても区別がつかない



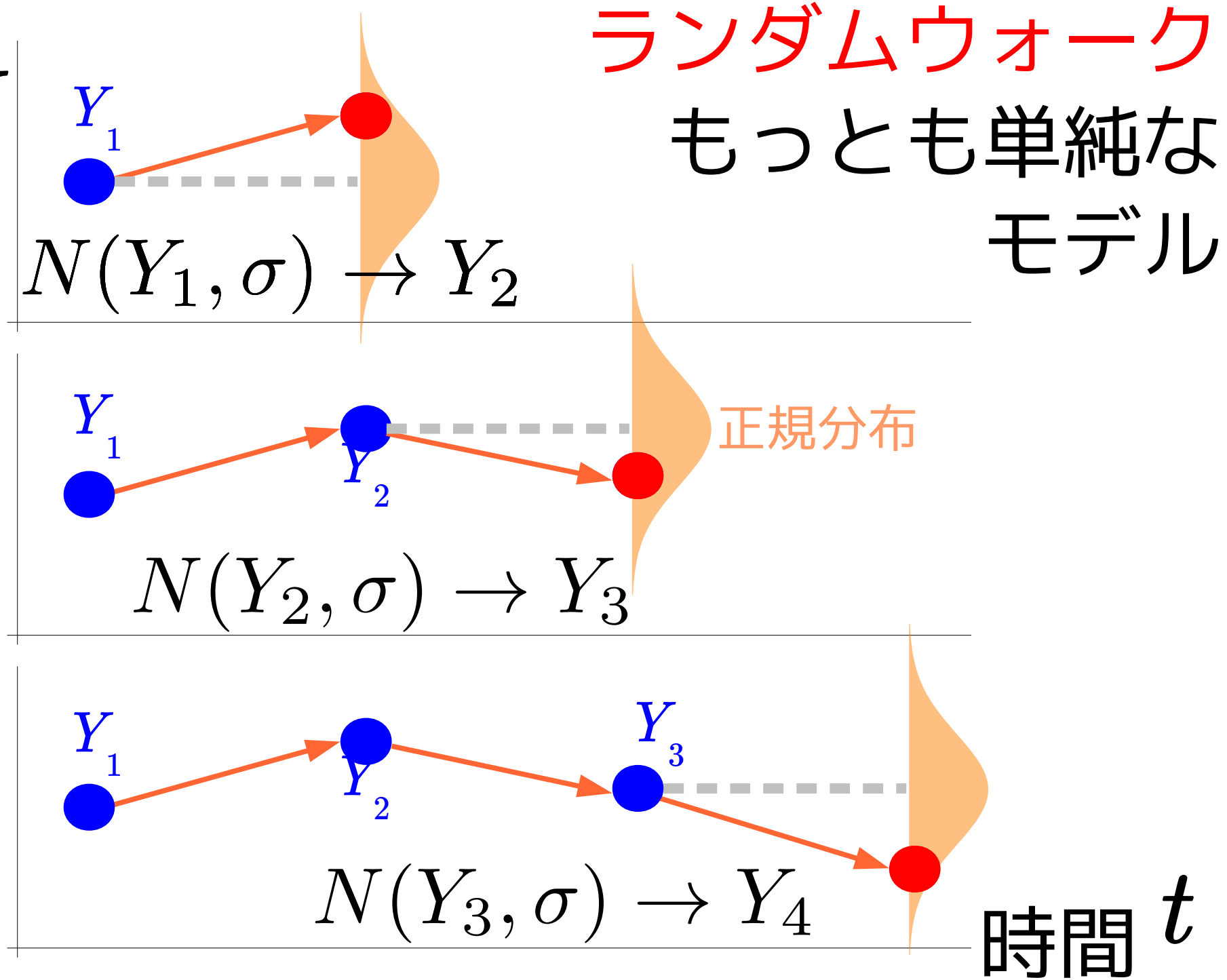






ランダムウォーク

もっとも単純なモデル

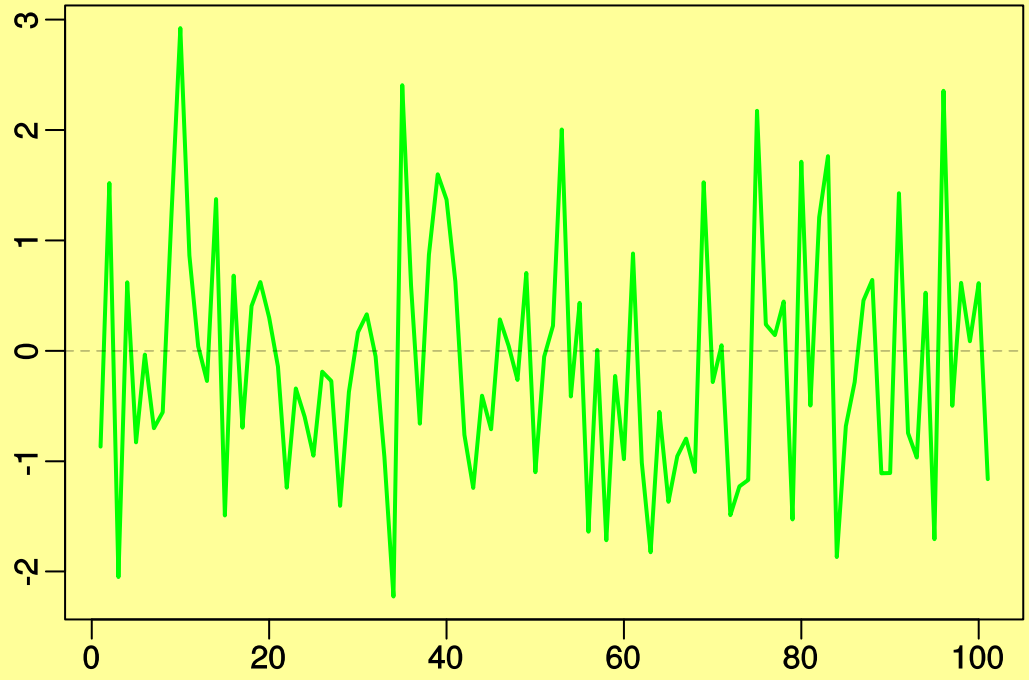


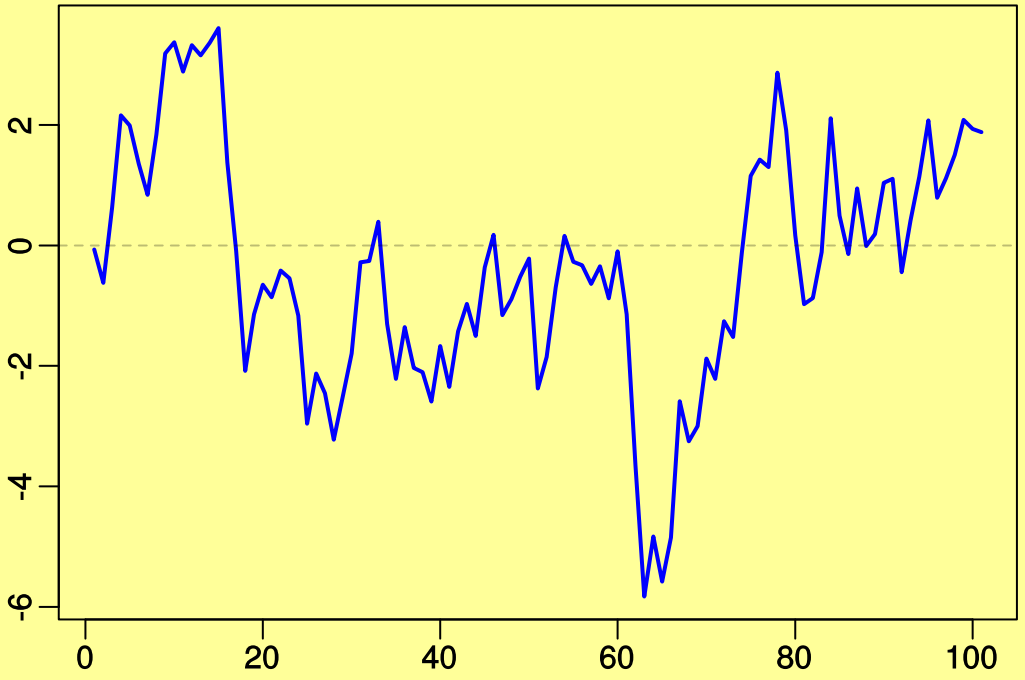
状態空間モデルでたちむかう

時系列データ解析

いろいろな時系列データを

統一的にあつかえないか?





時系列データ解析の教科書，ねえ……

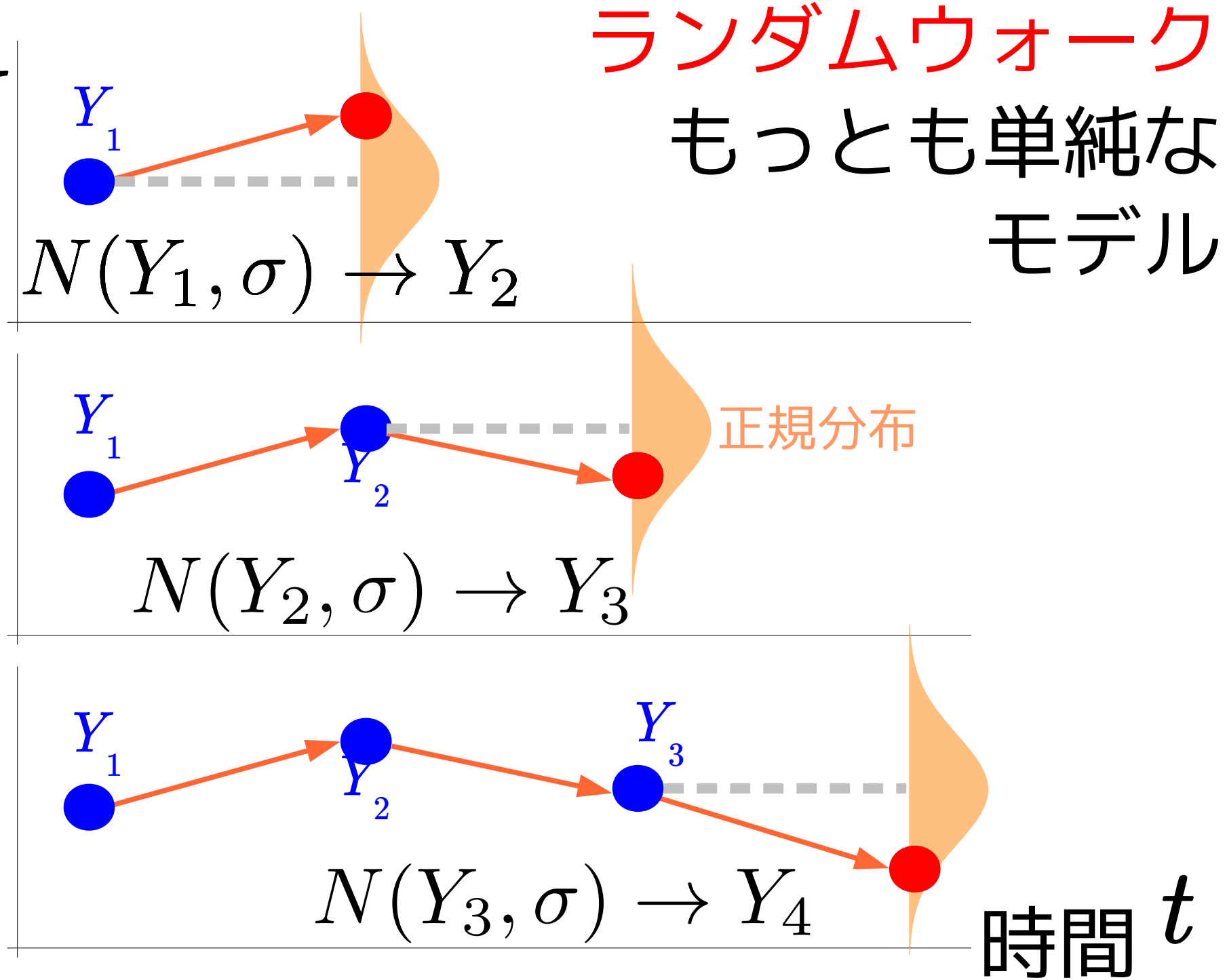
- モデルがあれこれ多すぎる
- 経済学よりのモデルばかり
- なんでも正規分布

なんとかならないかな?

状態空間モデル，どうでしょう?

ランダムウォーク

もっとも単純なモデル



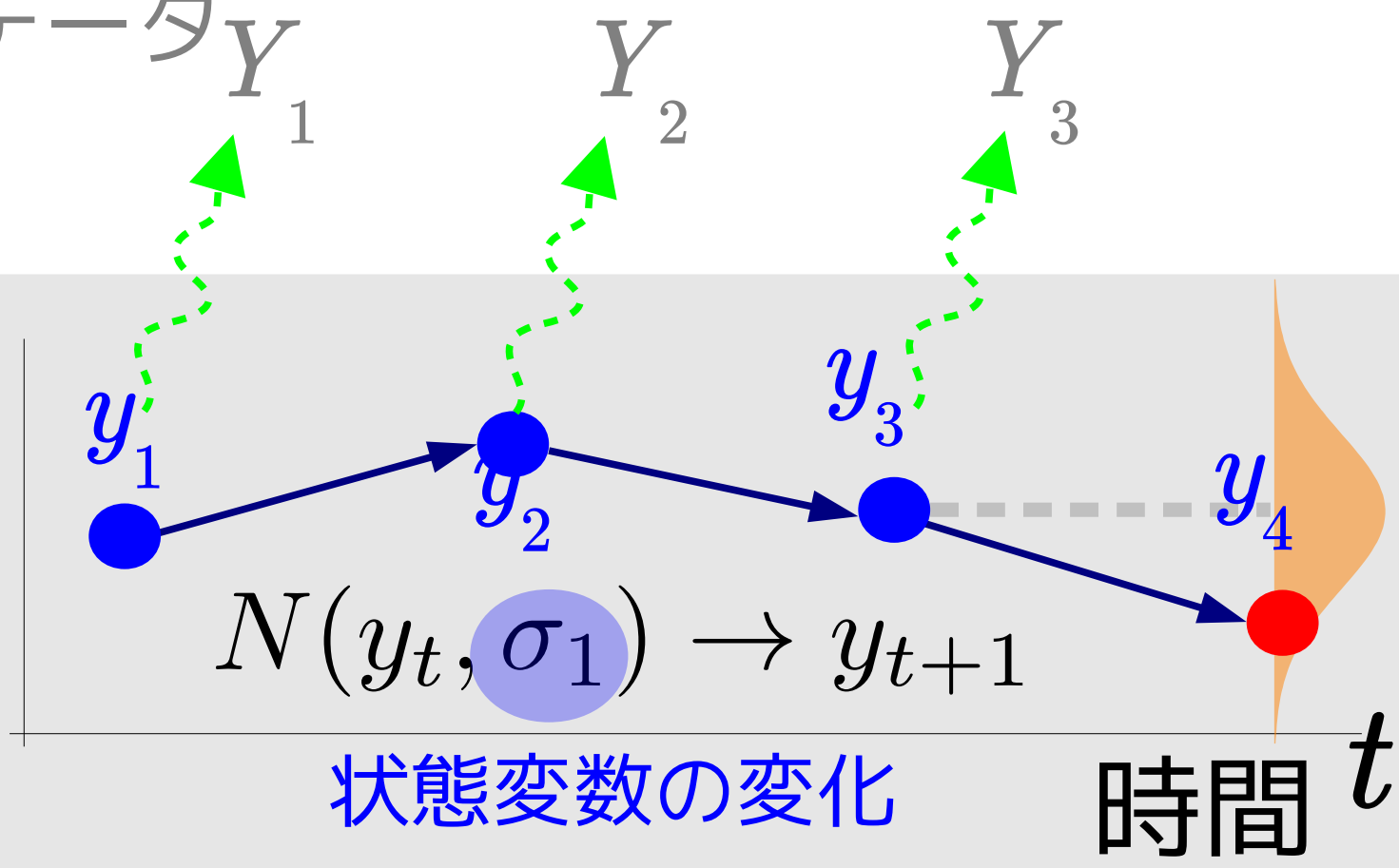
状態空間モデル

二種類のσをもつ

観測の誤差

$$N(y_t, \sigma_2) \rightarrow Y_t$$

観測データ



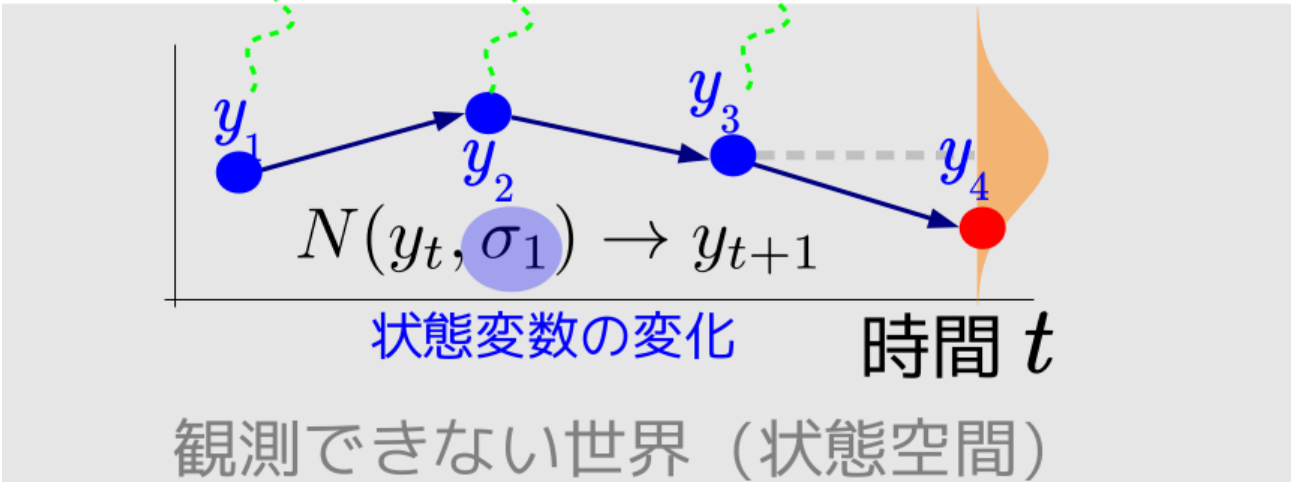
観測できない世界（状態空間）

状態空間モデル

観測の誤差

$N(y_t, \sigma_2) \to Y_t$ 二種類の σ をもつ

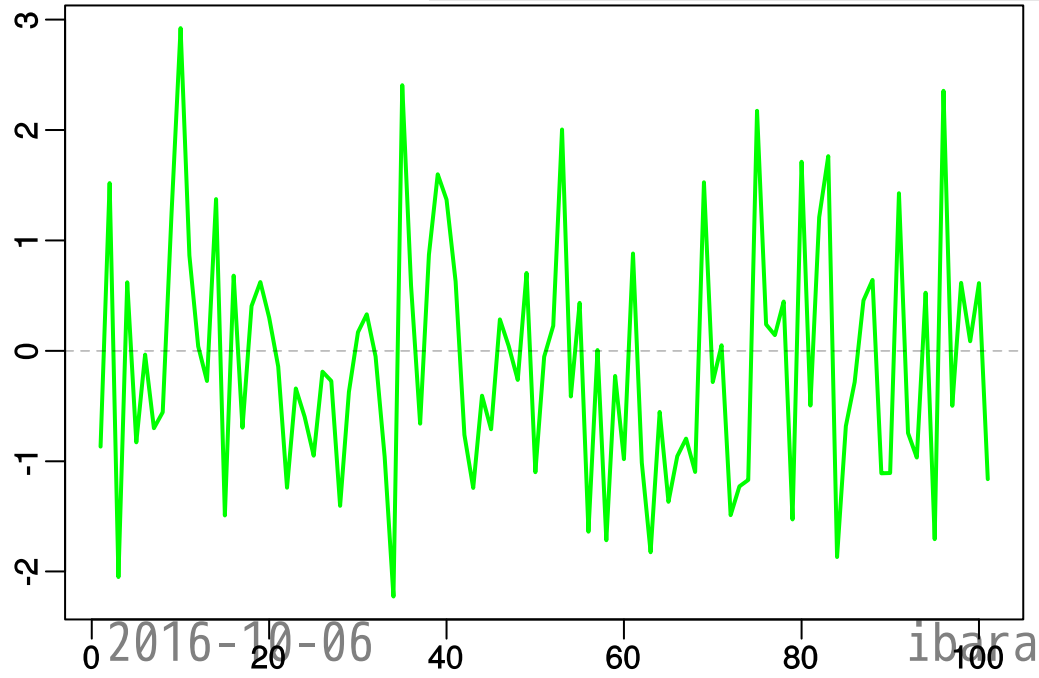
観測データ Y_1 Y_2 Y_3

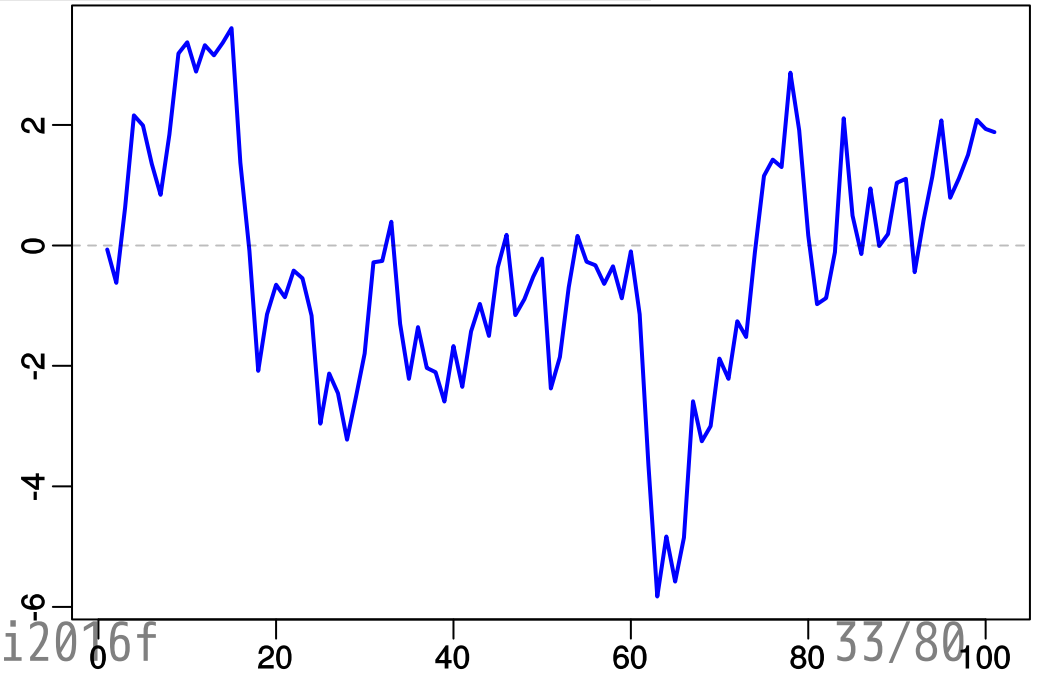


観測できない世界（状態空間）

σ_2 大
σ_1 小

σ_2 小
σ_1 大



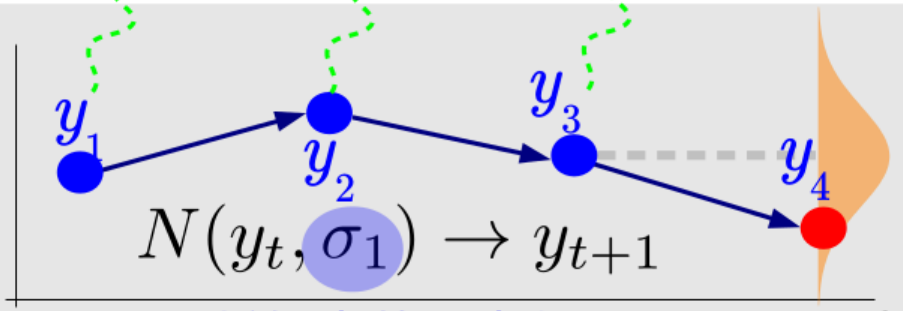


状態空間モデル

観測の誤差

$N(y_t, \sigma_2) \to Y_t$ 二種類の σ をもつ

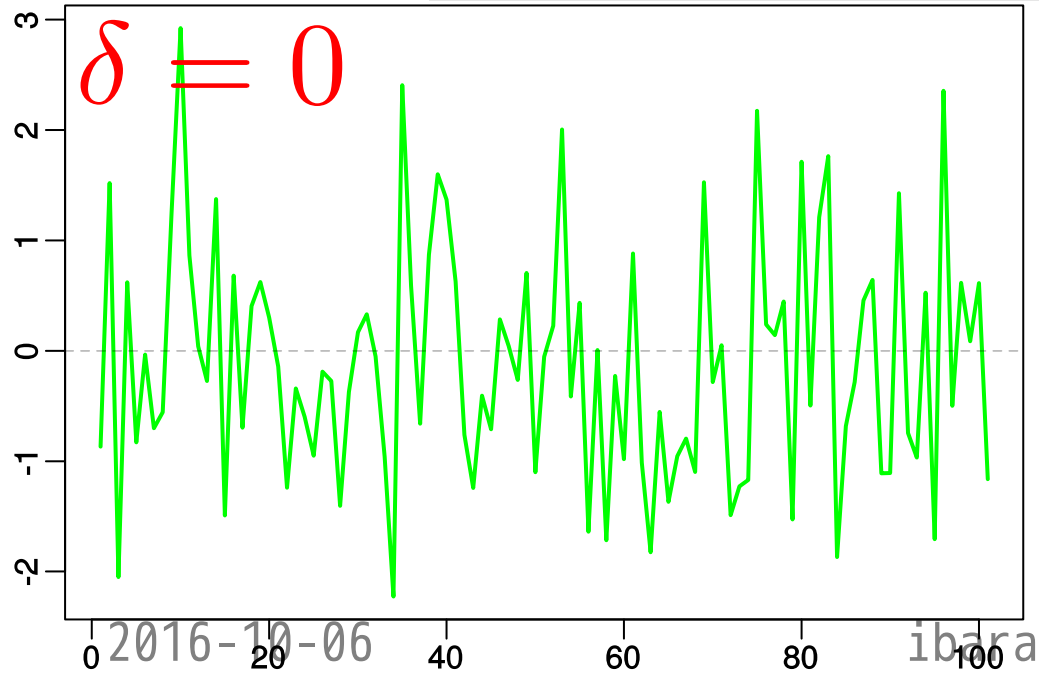
観測データ Y_1 Y_2 Y_3

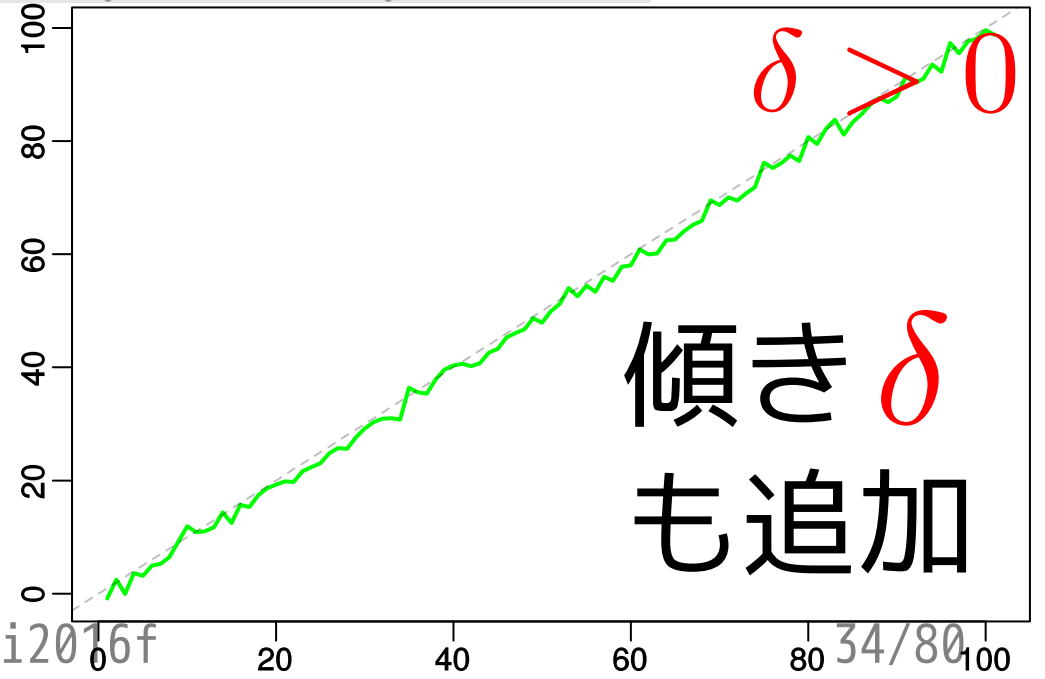


観測できない世界（状態空間）

σ_2 大

σ_1 小

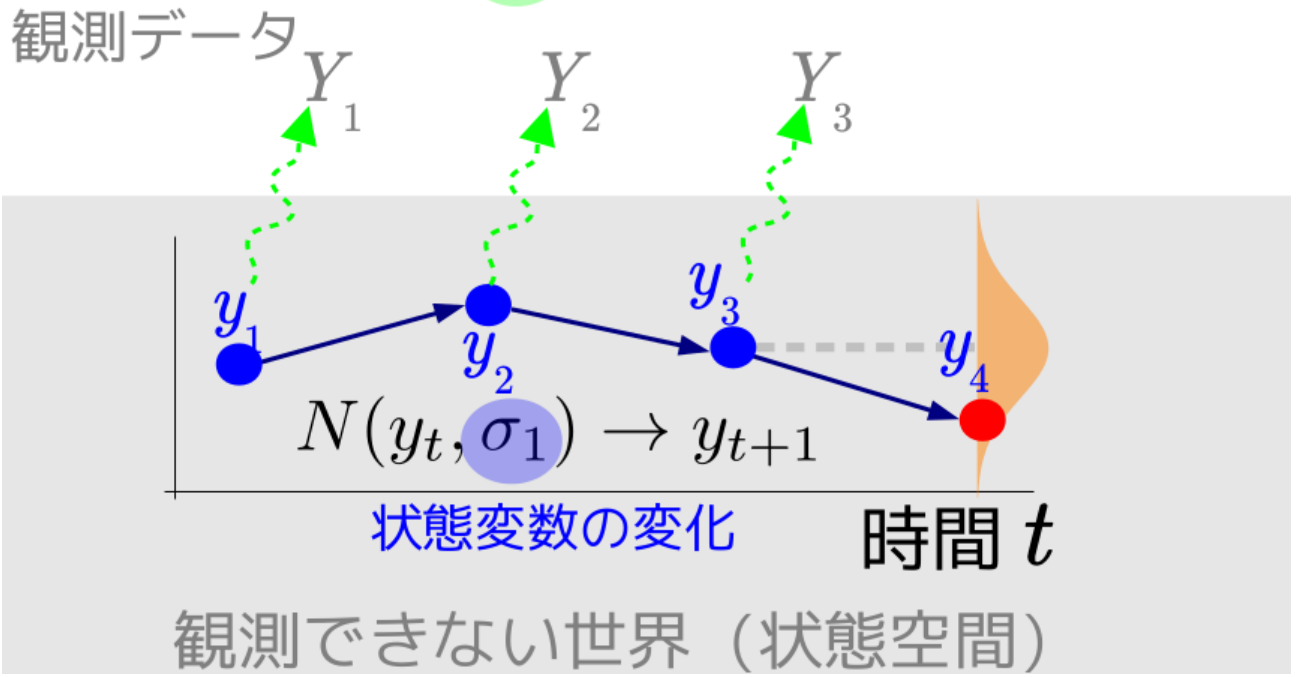




状態空間モデル

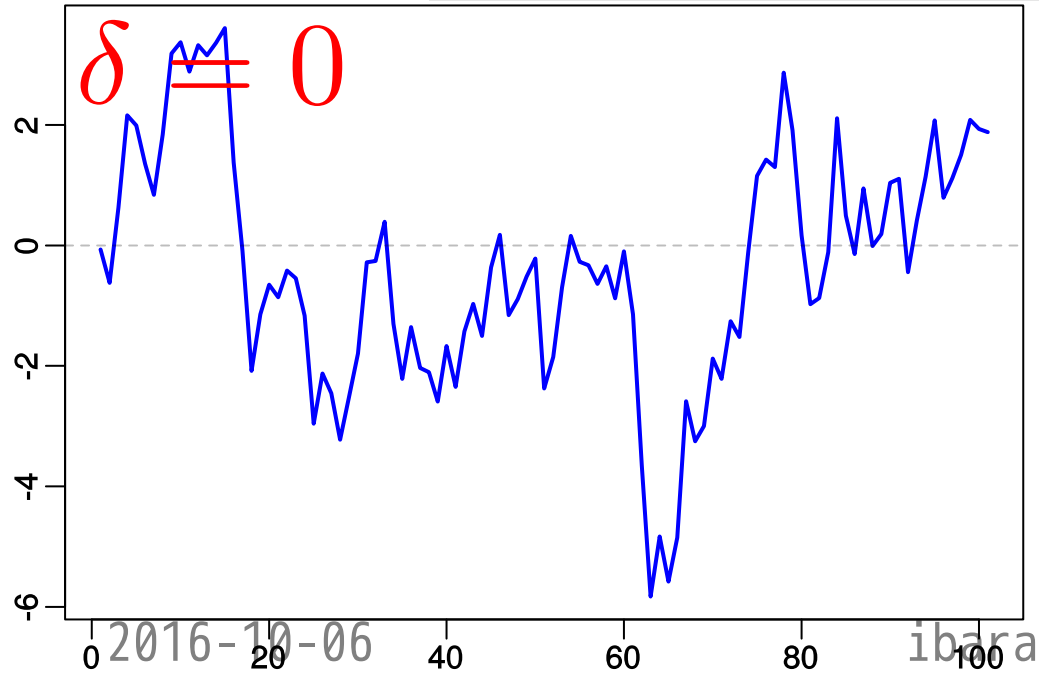
観測の誤差

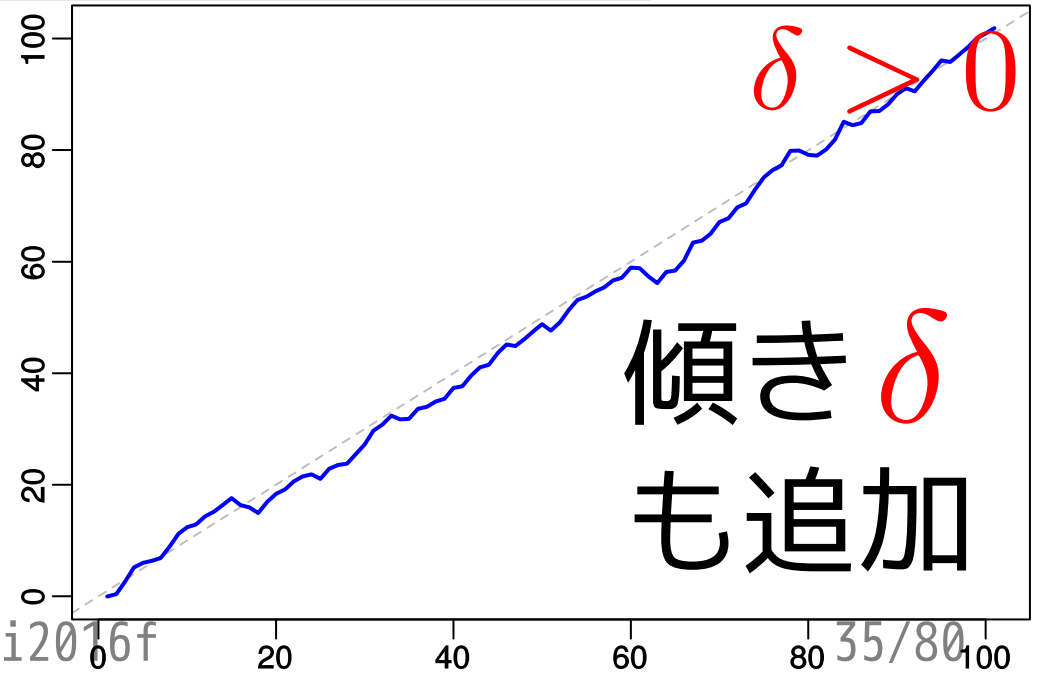
$N(y_t, \sigma_2) \to Y_t$ 二種類の σ をもつ



σ_2 小

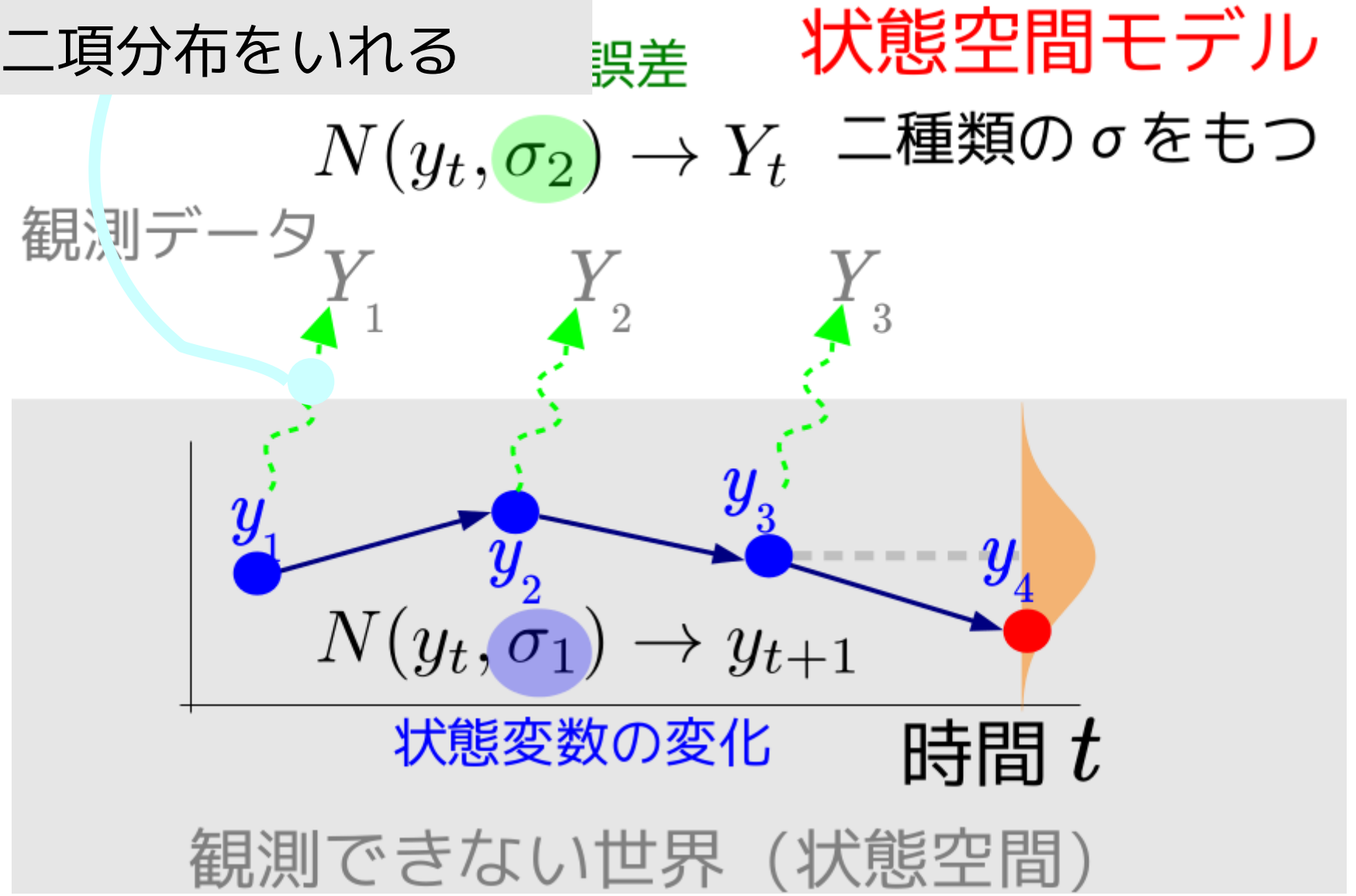
σ_1 大





状態空間モデル + GLM

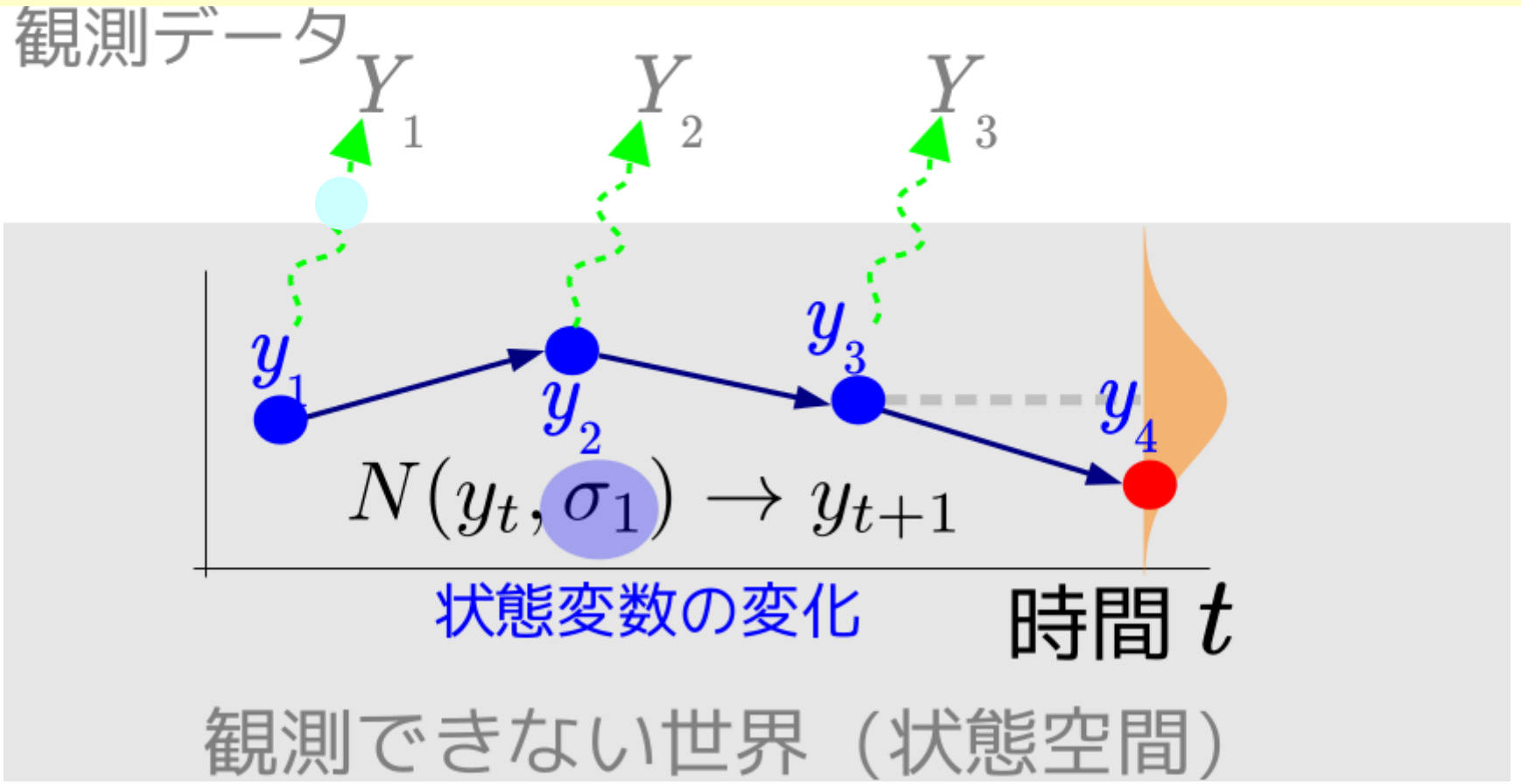
この部分にポアソン分布や
二項分布をいれる



状態空間モデル + GLM

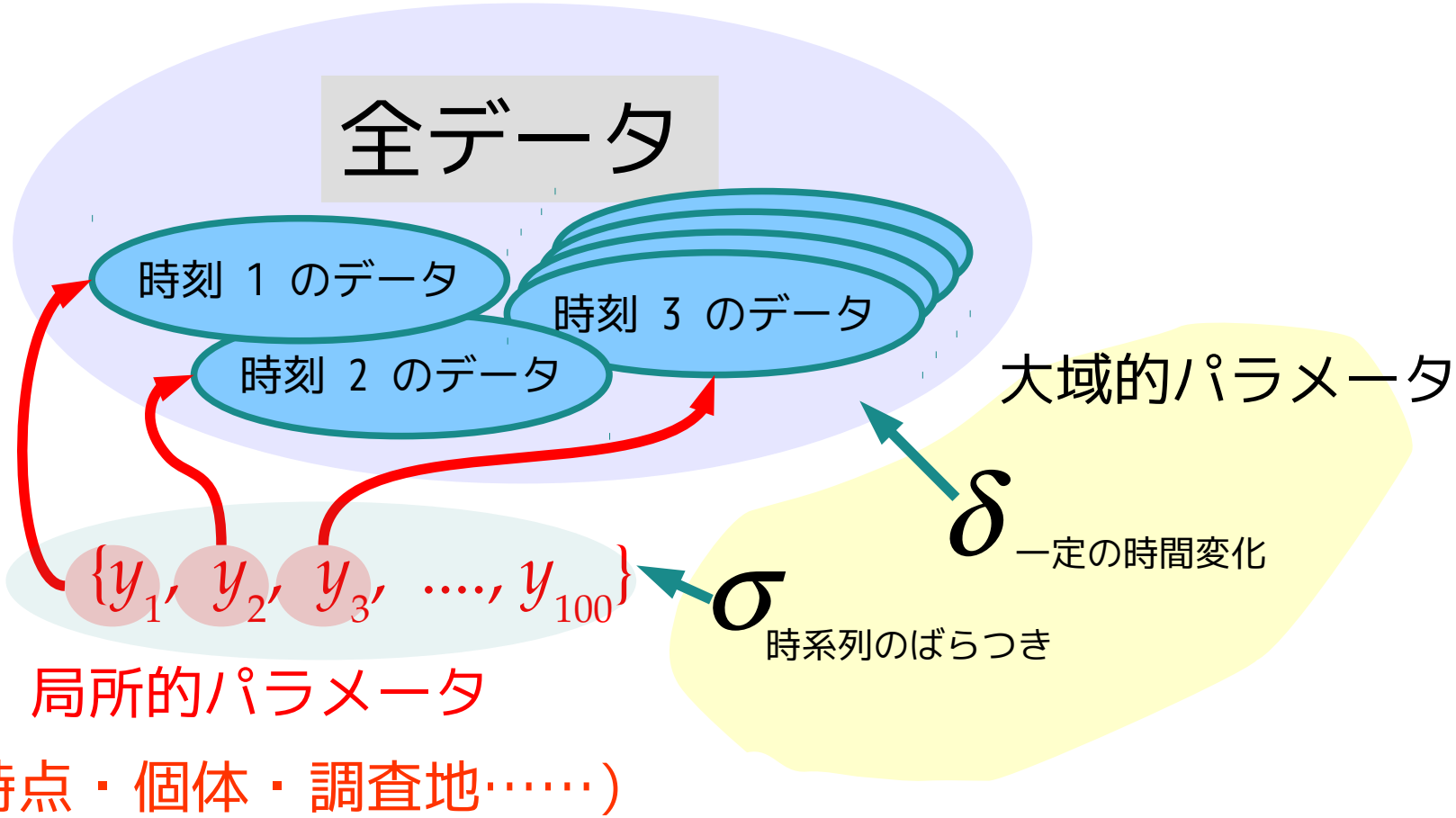
他にも季節変動などを
入れることができます

今日は
省略…
すみません



階層ベイズモデルとは?

多数の「似たようなパラメーター」たちに
「適切」な制約を加えて推定できる



(たくさんの時点・個体・調査地……)

どうやてモデルをあてはめる?

R の状態空間モデルの

package いろいろある

```
library(dlm)
```

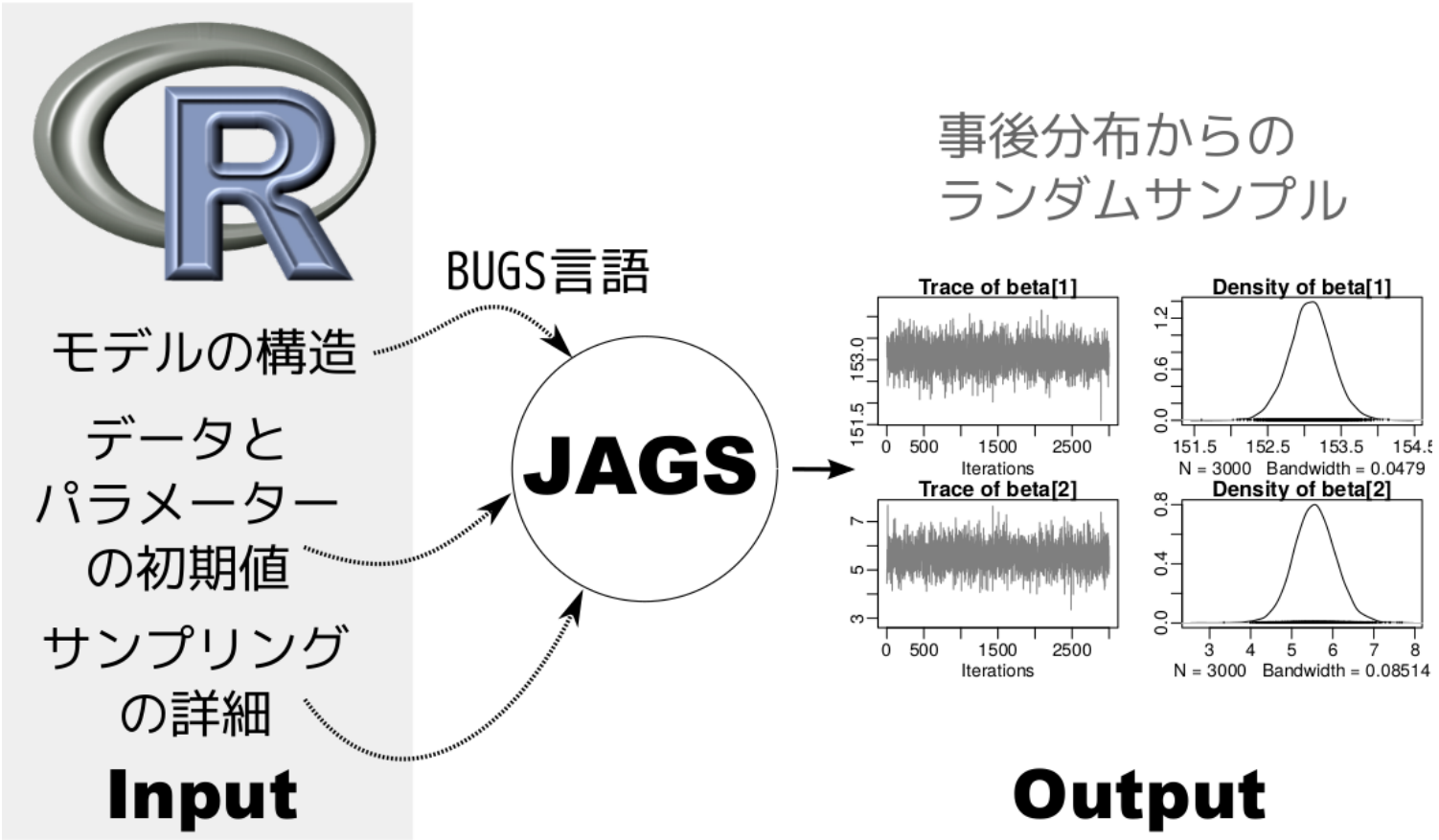
```
library(KFAS)
```

(けっこうめんどう?)

こういう問題も JAGS で

BUGS 言語でこの単純な

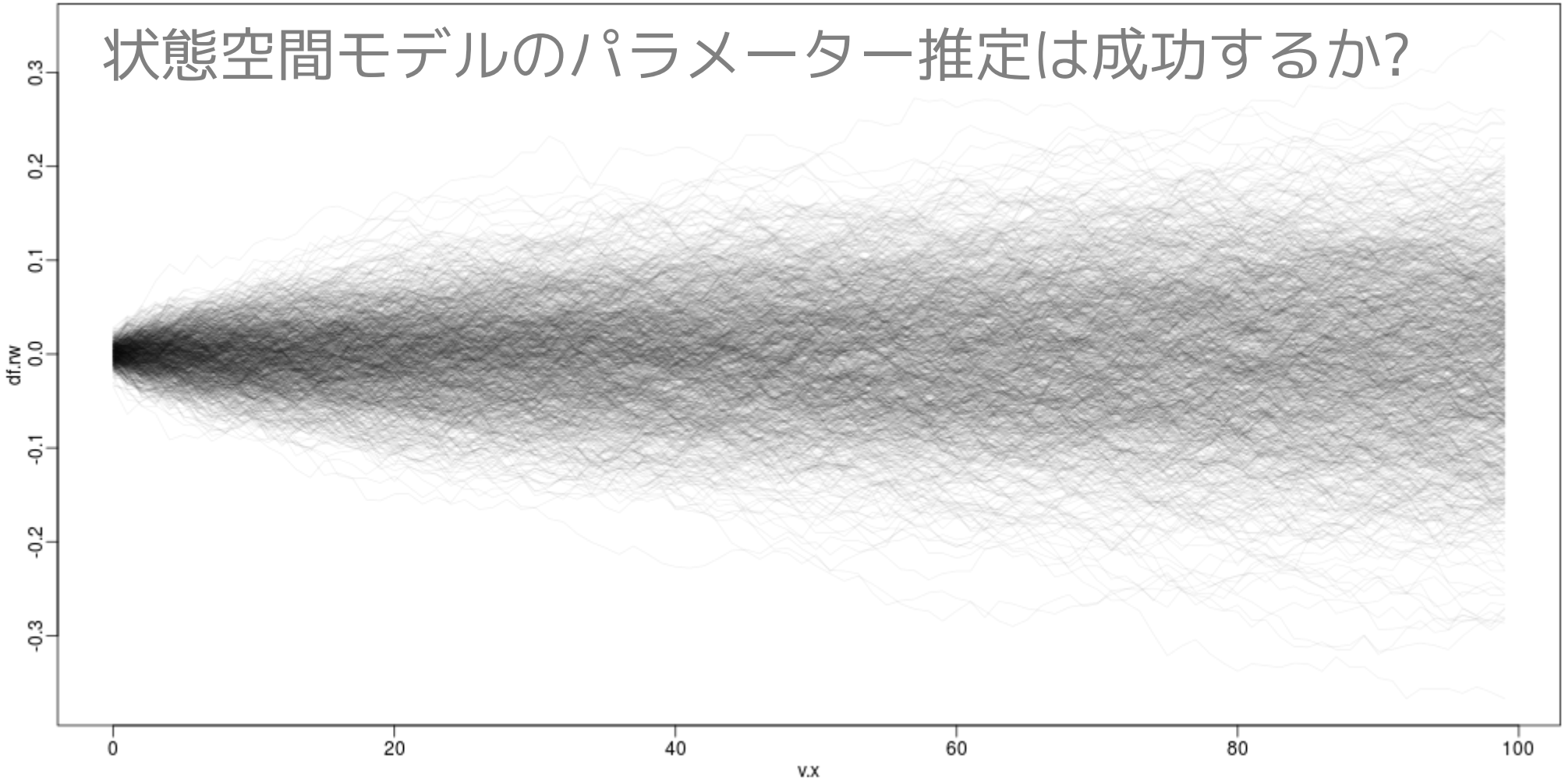
階層ベイズモデルを記述できる



```
model
{
    Tau.Noninformative <- 0.0001
    Y[1] ~ dnorm(y[1], tau[2])
    y[1] ~ dnorm(0, Tau.Noninformative)
    for (t in 2:N.Y) {
        Y[t] ~ dnorm(y[t], tau[2])
        y[t] ~ dnorm(m[t], tau[1])
        m[t] <- delta + y[t - 1]
    }
    delta ~ dnorm(0, Tau.Noninformative)
    for (k in 1:2) {
        tau[k] <- 1 / (s[k] * s[k])
        s[k] ~ dunif(0, 10000)
    }
}
```

1000 個の架空データを推定

いろいろなランダムウォークが生成される



状態空間モデルを

「かたむきゼロ」ランダムウォーク

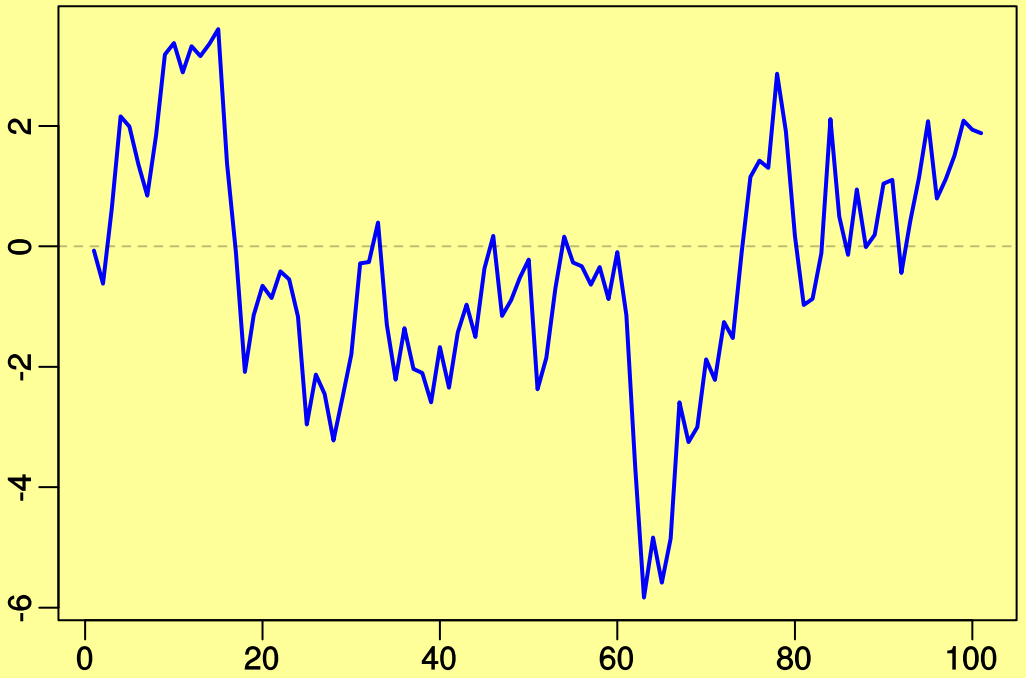
$\delta = 0$

な架空データにあてはめる

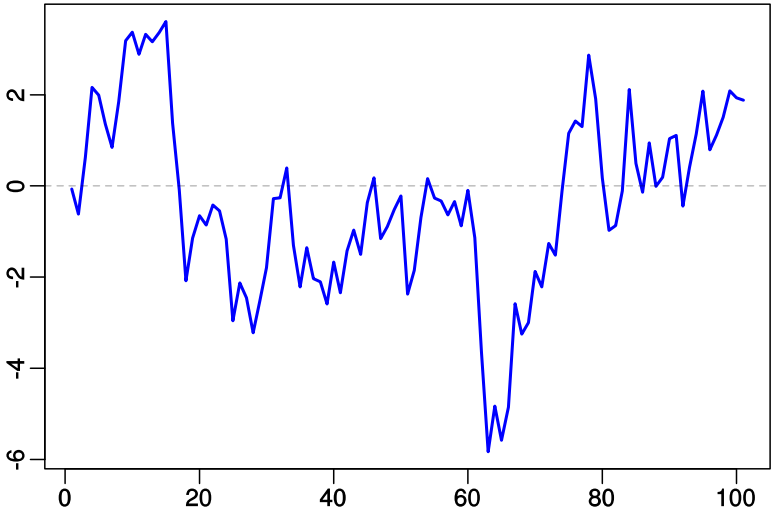
σ_2 小

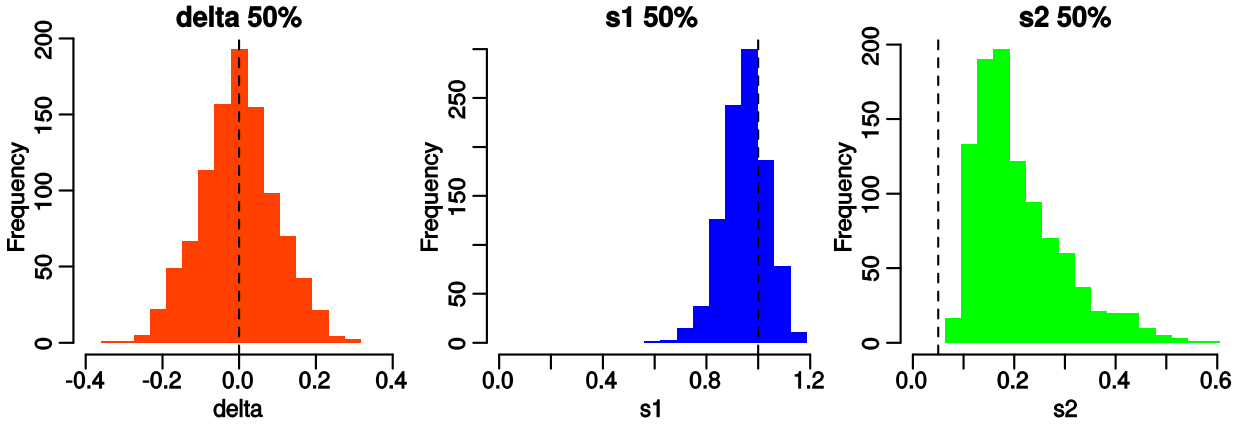
σ_1 大

$\delta = 0$

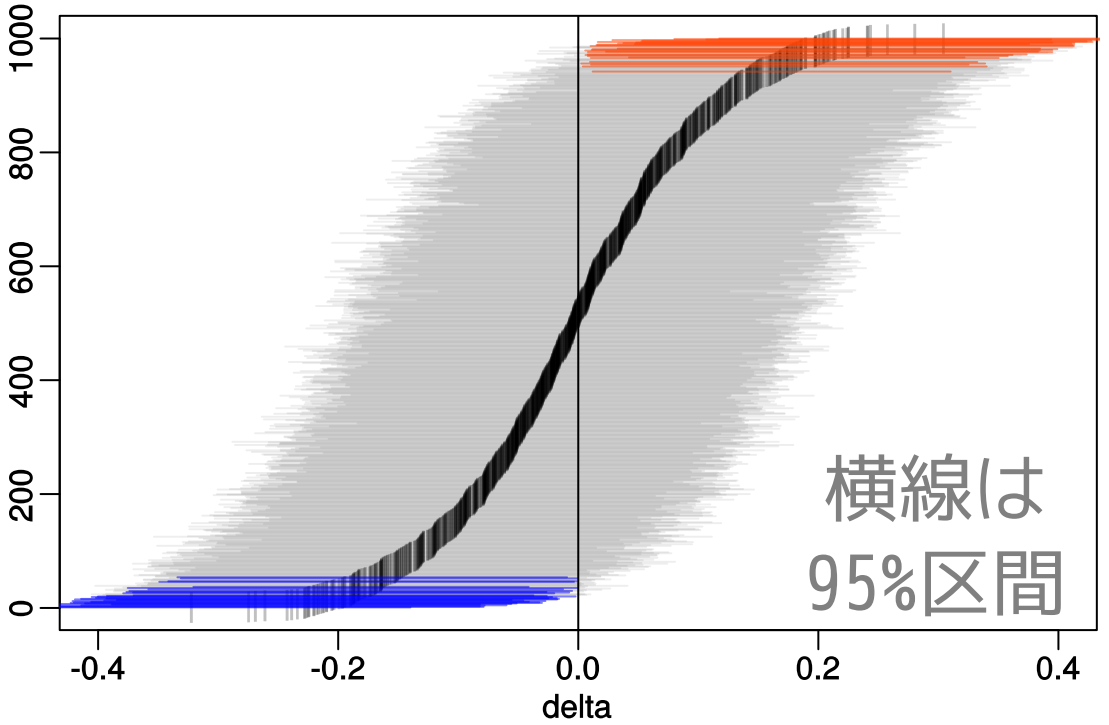


「傾き」δの事後分布を見る





真のδは 0



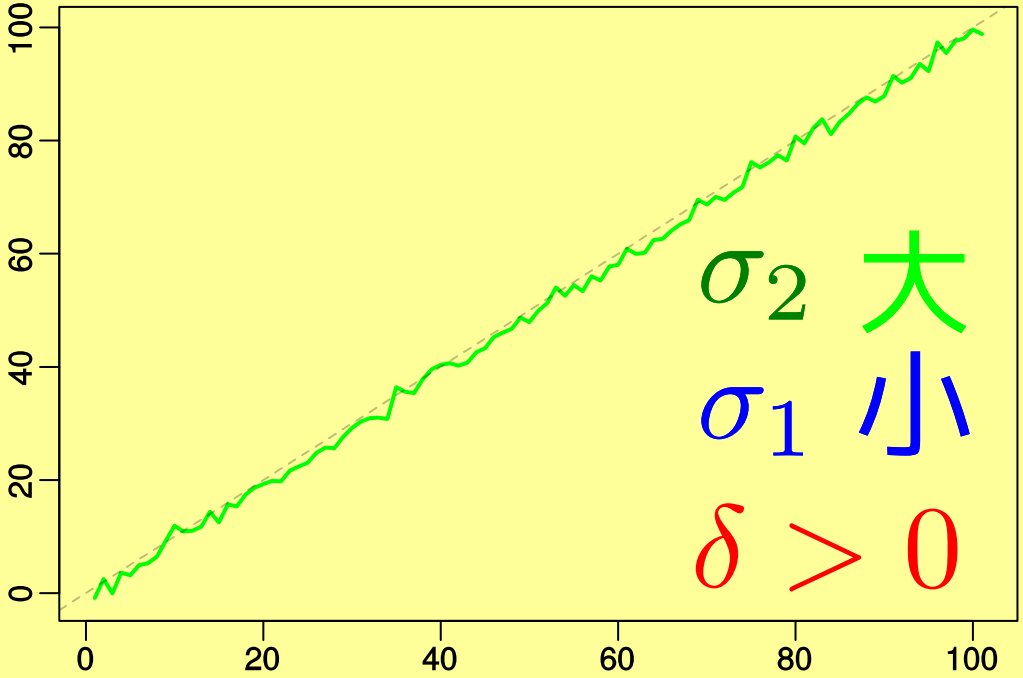
1000回中
63回ずれた

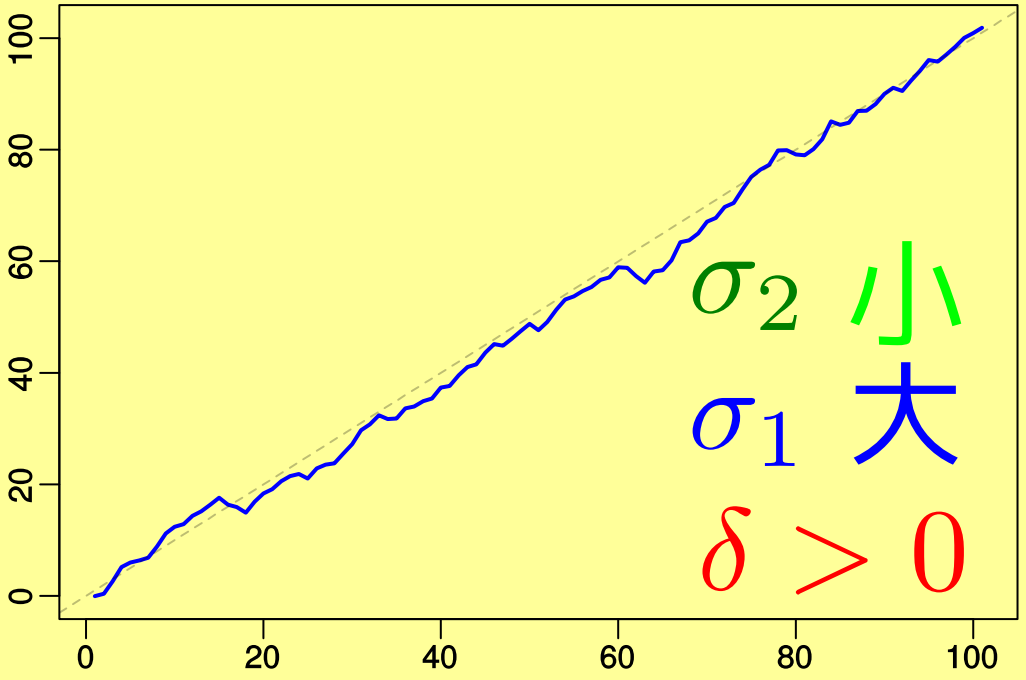
状態空間モデルを

「かたむきあり」ランダムウォーク

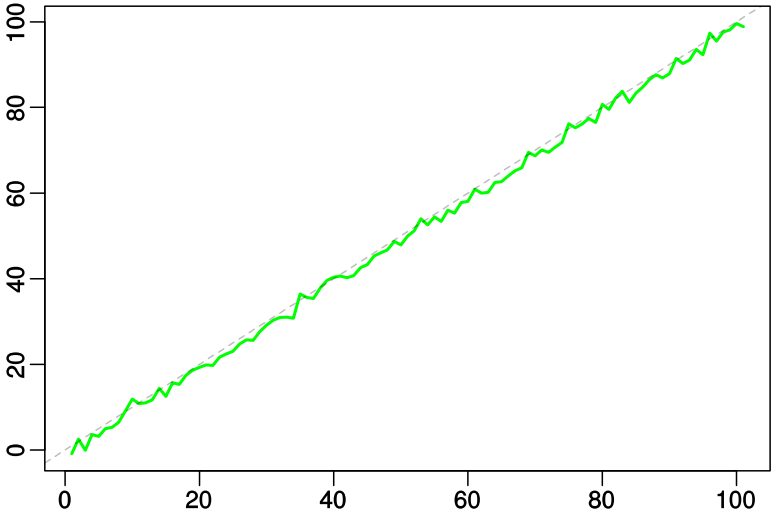
$\delta > 0$

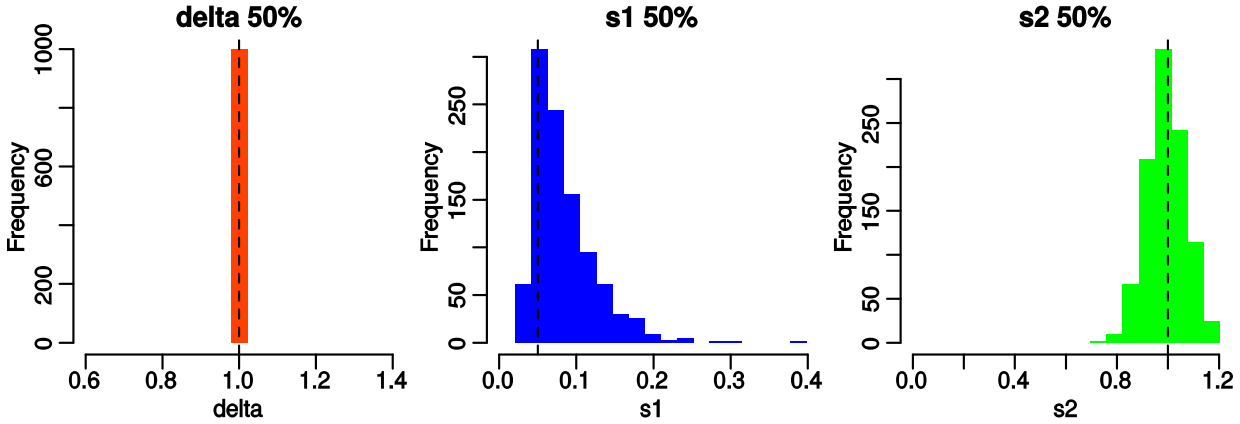
な架空データにあてはめる



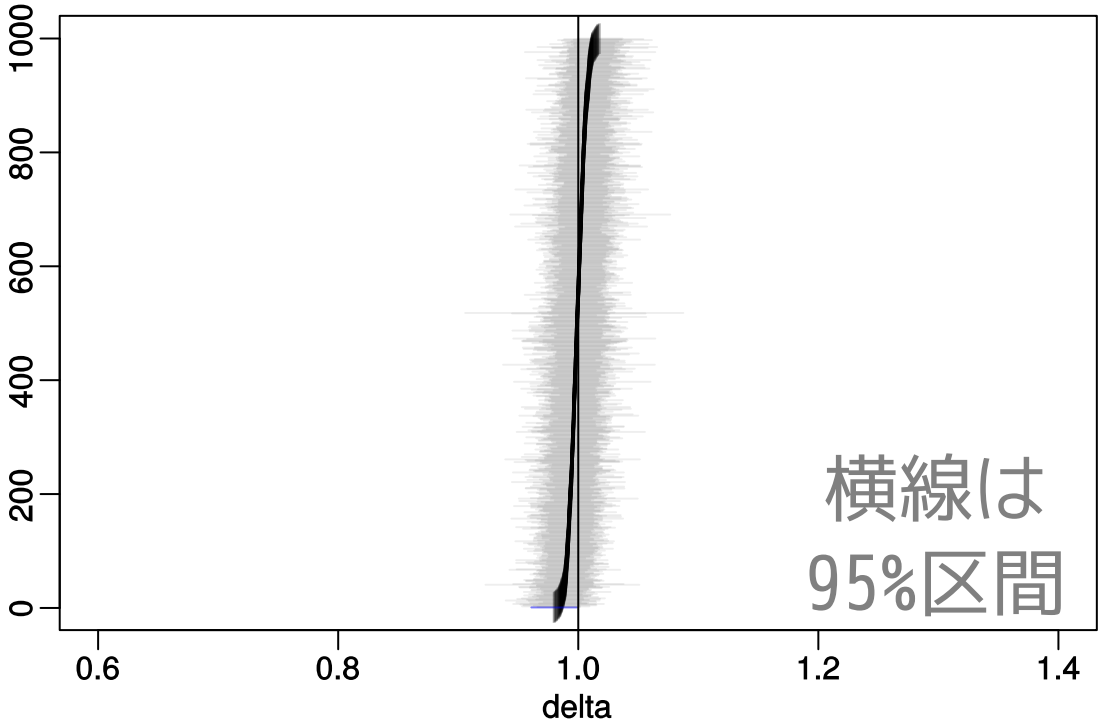


「傾き」δの事後分布を見る



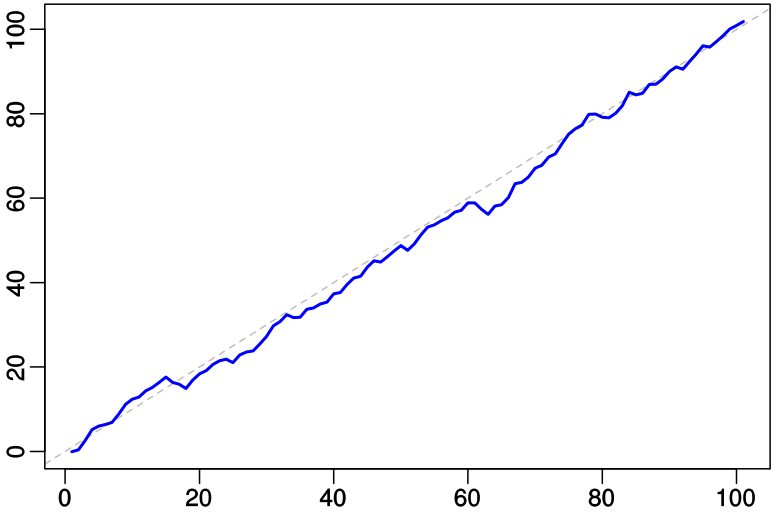


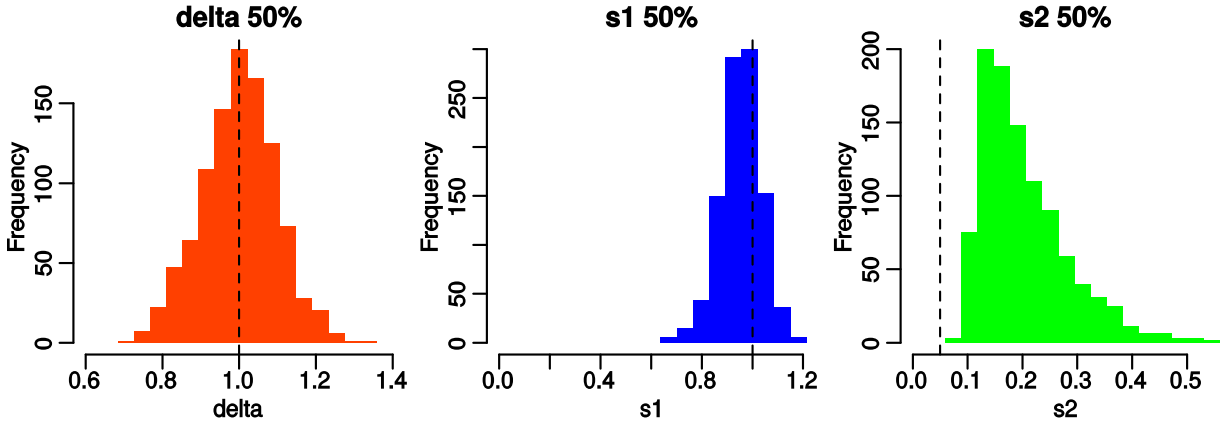
真のδは 1



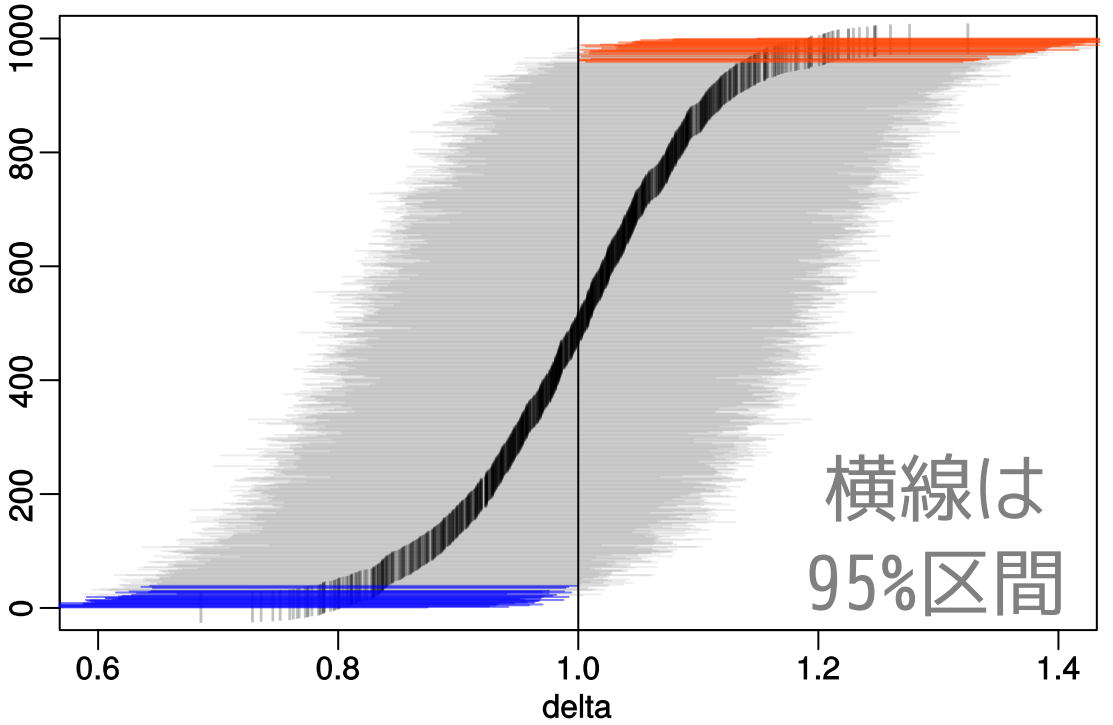
1000回中
1回ずれた

「傾き」δの事後分布を見る



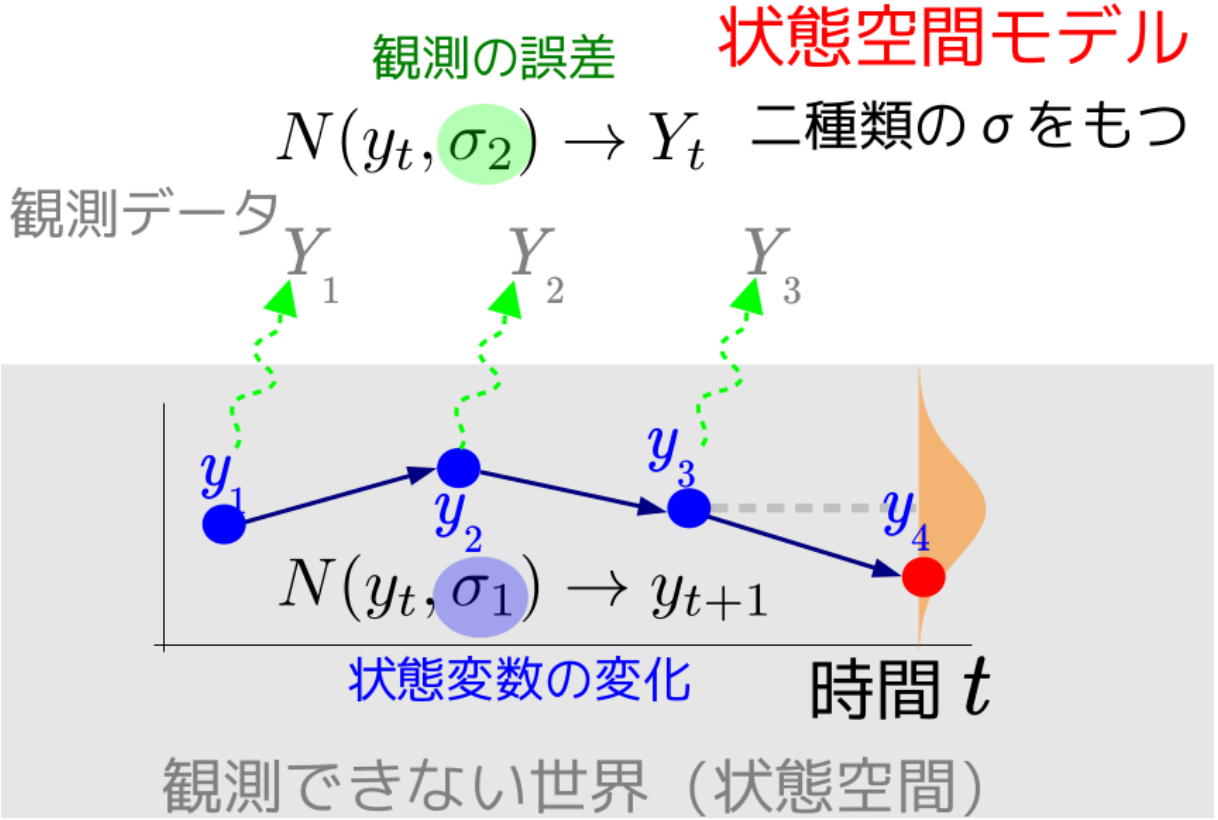


真のδは 1

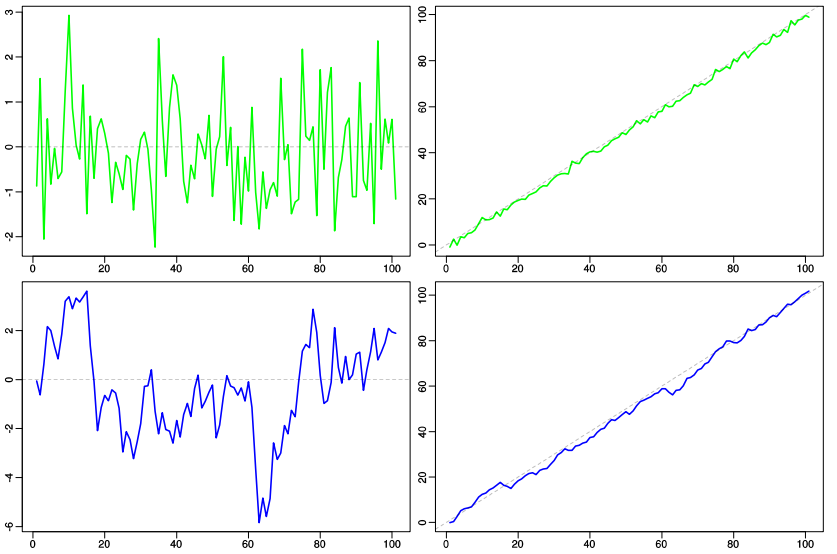


1000回中
62回ずれた

とりあえずの結論



ひとつの状態空間
モデルを使って



右の4状態は
区別可能でしょう

今回，説明してみたいこと

- 時系列データ:単純な回帰はダメ(続)
- 状態空間モデル: 乱歩と雑音の分離
- 欠測と不等間隔
- 時系列「ばらばら解析」やめよう
- 「うたがわしい回帰」への対策

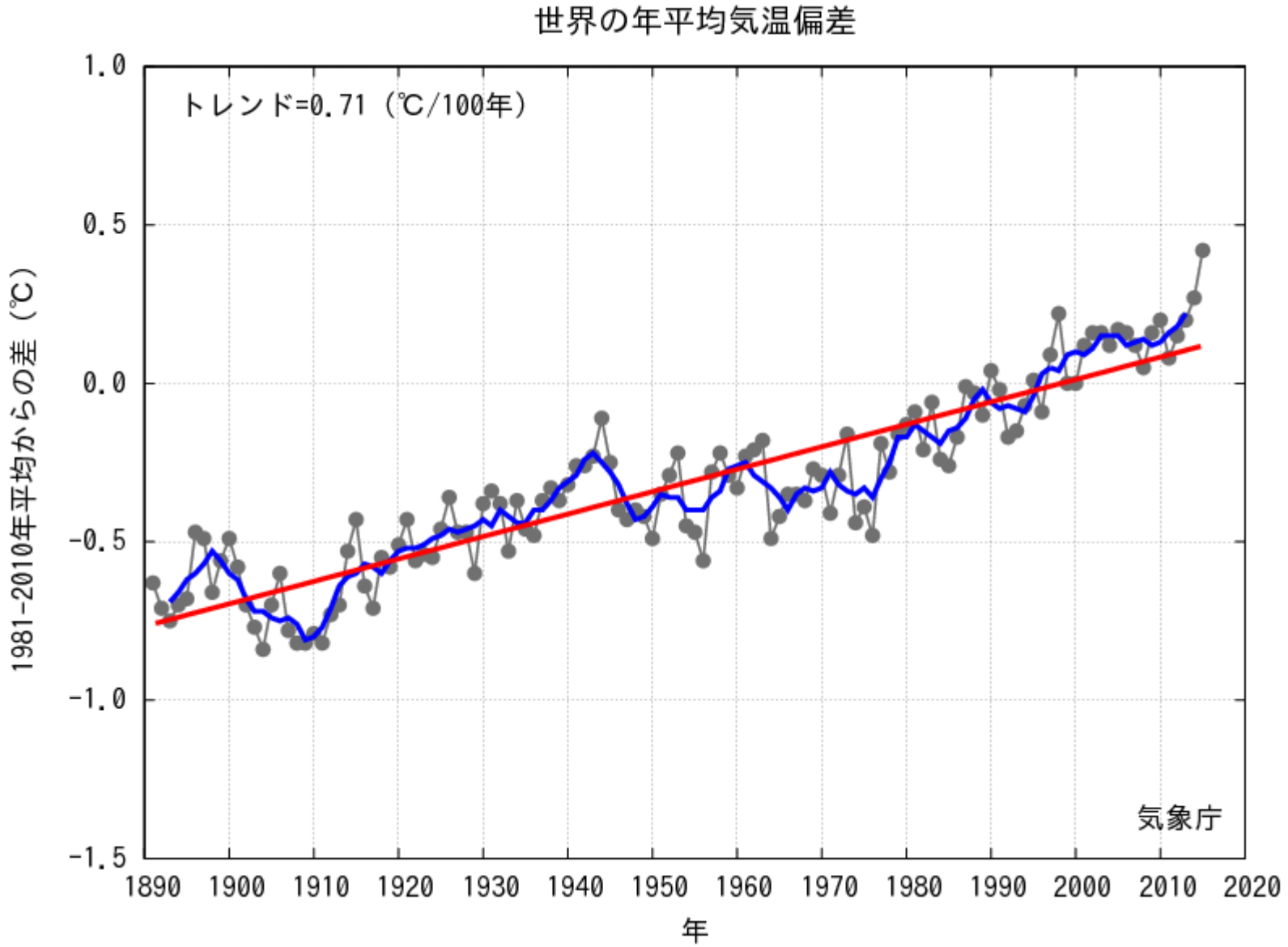
階層ベイズモデル!

状態空間モデルを使う利点

「ばらばら解析」の回避

気象庁のデータ解析？

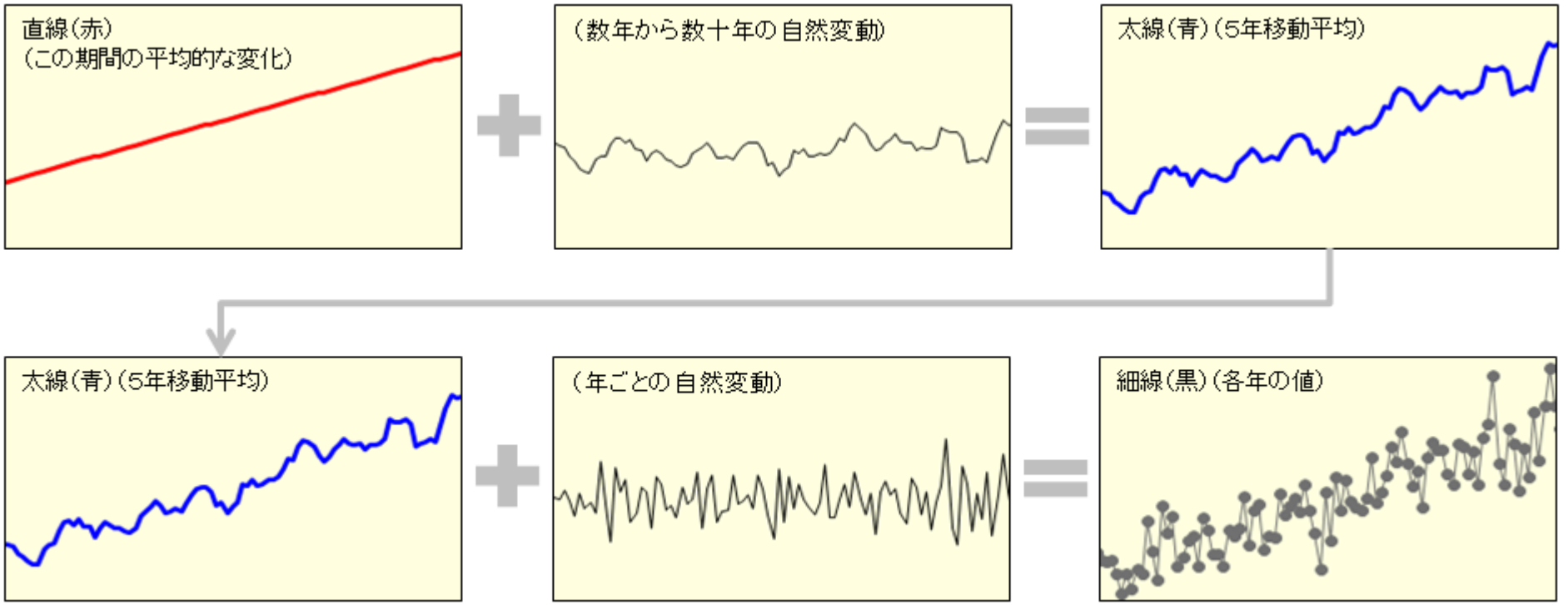
気象庁の長期変化傾向（トレンド）の解説

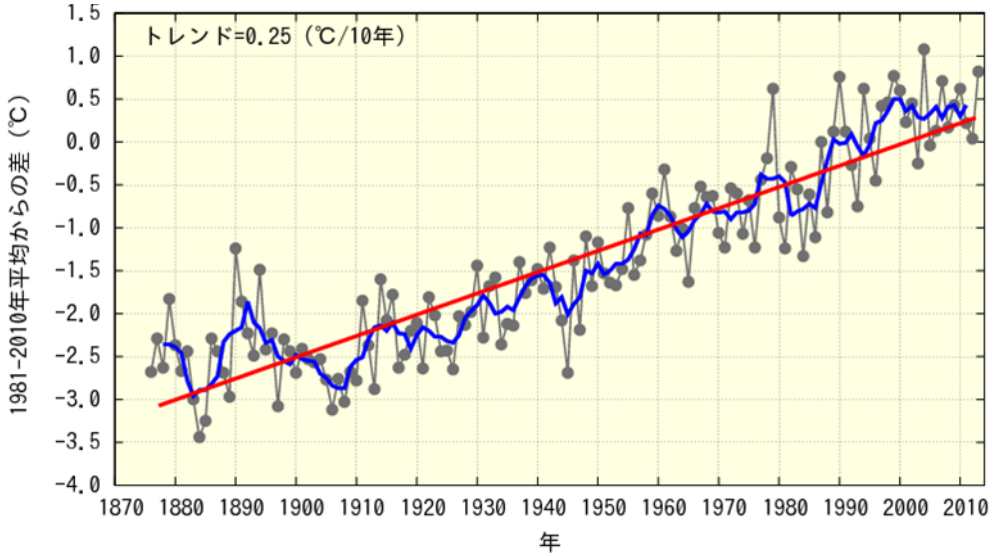


http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/temp/an_wld.html

気象庁の長期変化傾向（トレンド）の解説

http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/temp/trend.html

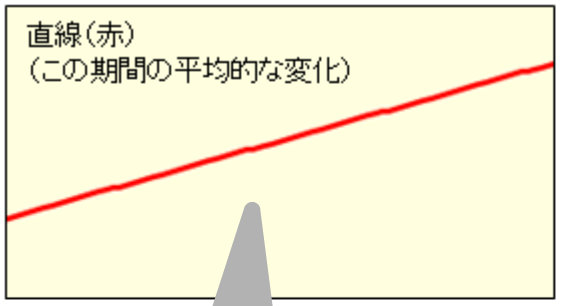




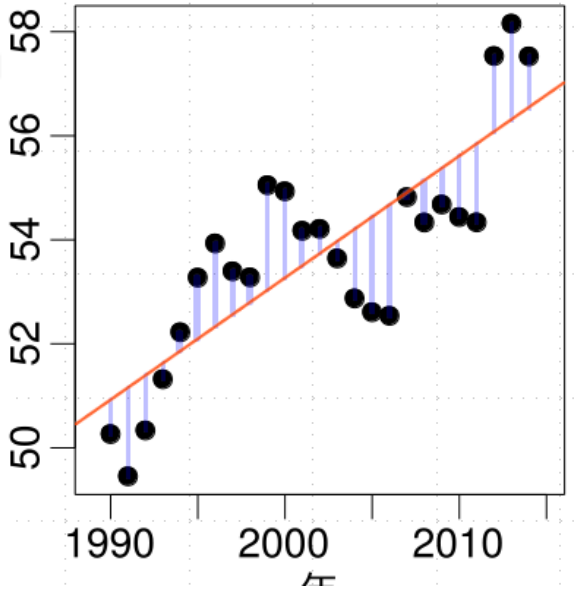
気象庁
ばらばら
メソッド?

気象庁ばらばらメソッド何がまずいか?

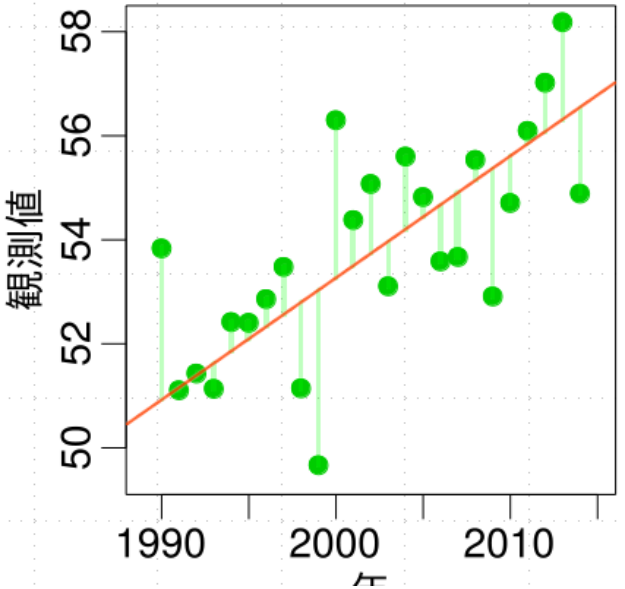
http://www.data.jma.go.jp/cpdinfo/temp/trend.html



時系列の「ずれ」



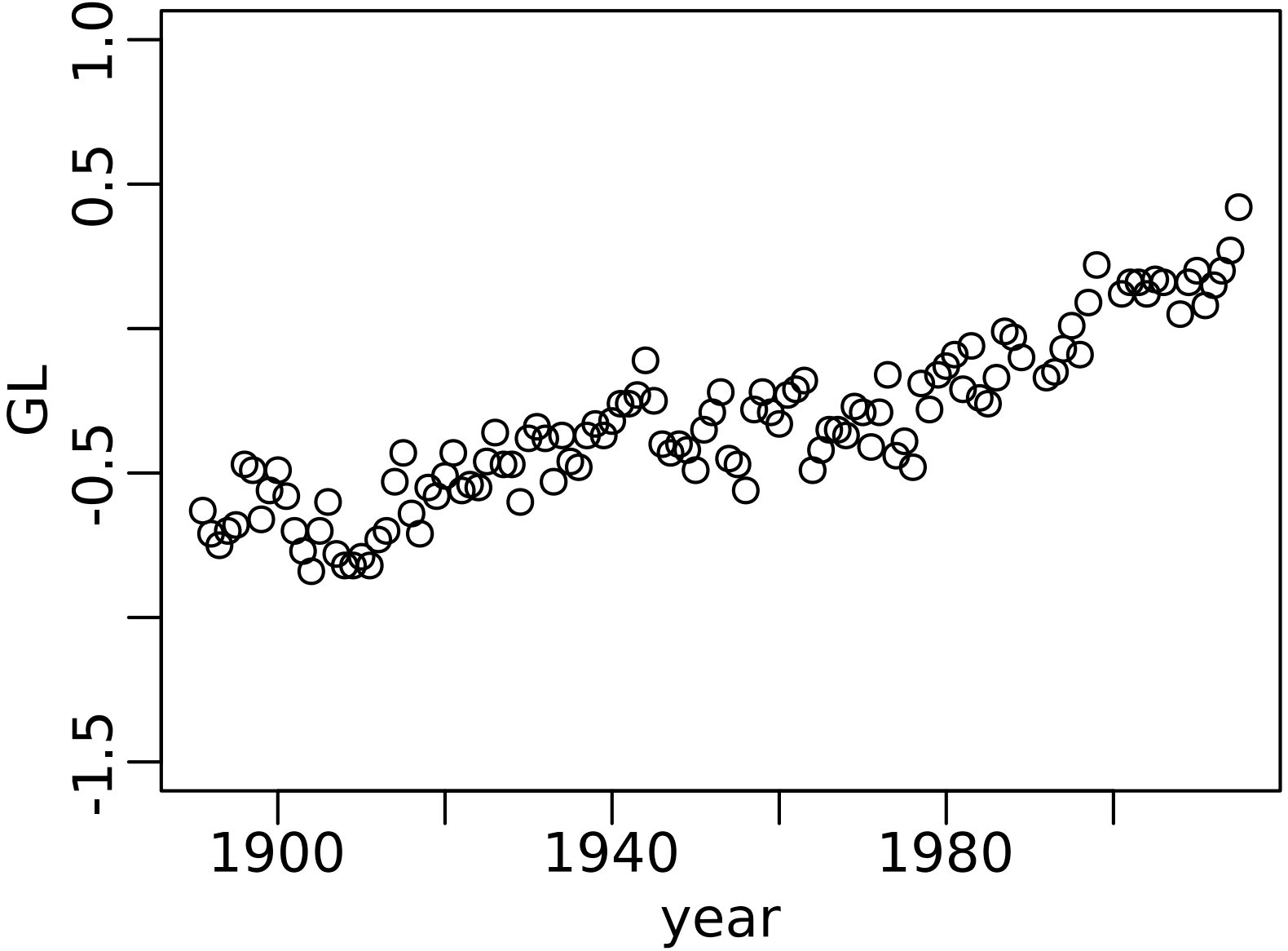
GLM のずれ



いきなり直線回帰!

(時系列データなんだから…)

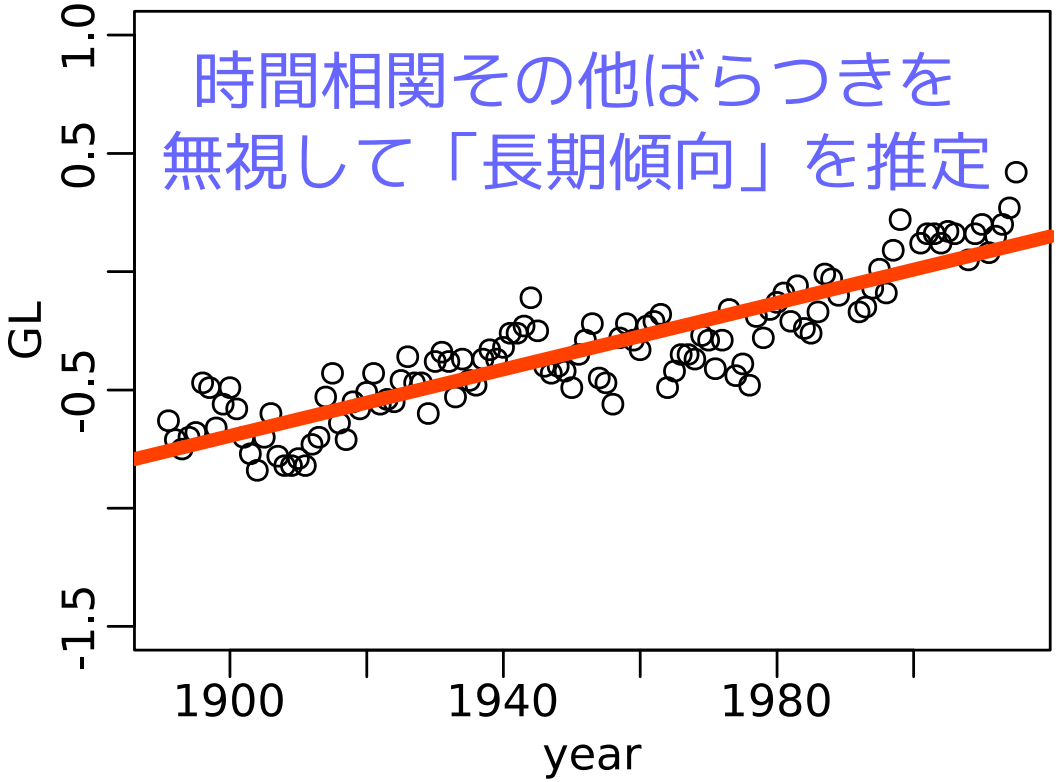
公開データをダウンロード



「とりあえず，直線回帰」の危険性

```
> summary(glm(GL ~ year, data = d))

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.41e+01   6.21e-01   -22.6   <2e-16
year         7.03e-03   3.18e-04    22.1   <2e-16
```

100年あたり0.70℃

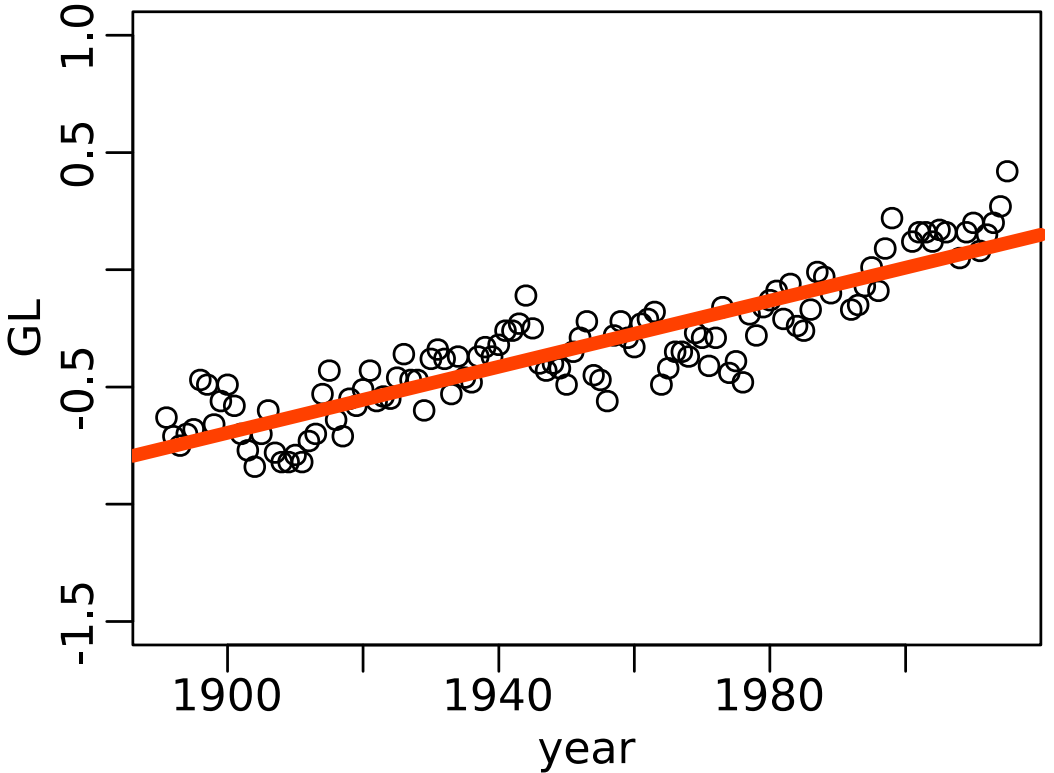


確率 1京ぶんの 2?

直線あてはめ（GLM）が予測した「温暖化」

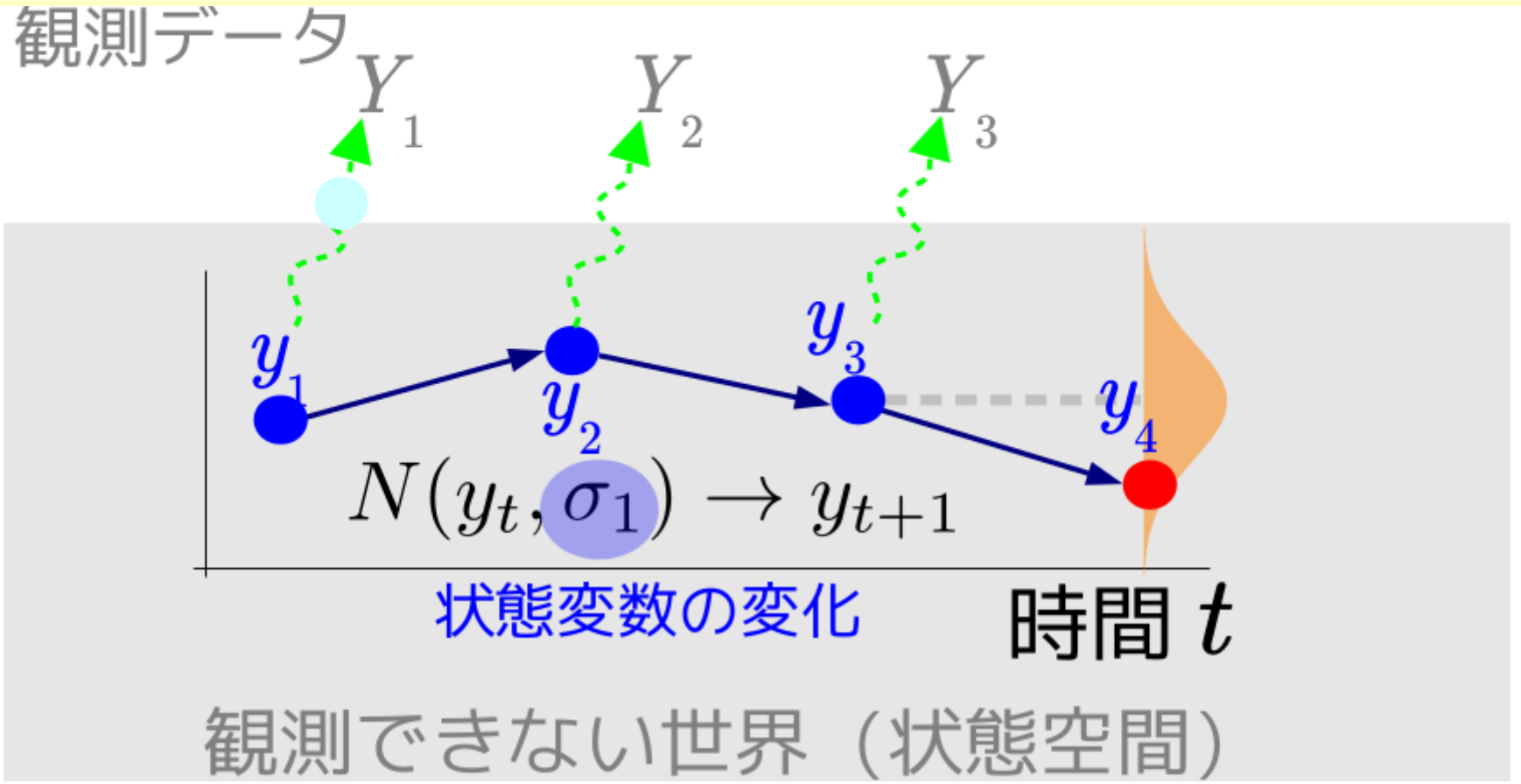
```
> summary(glm(GL ~ year, data = d))

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.41e+01   6.21e-01   -22.6   <2e-16
year         7.03e-03   3.18e-04    22.1   <2e-16
```

100年あたり0.70℃



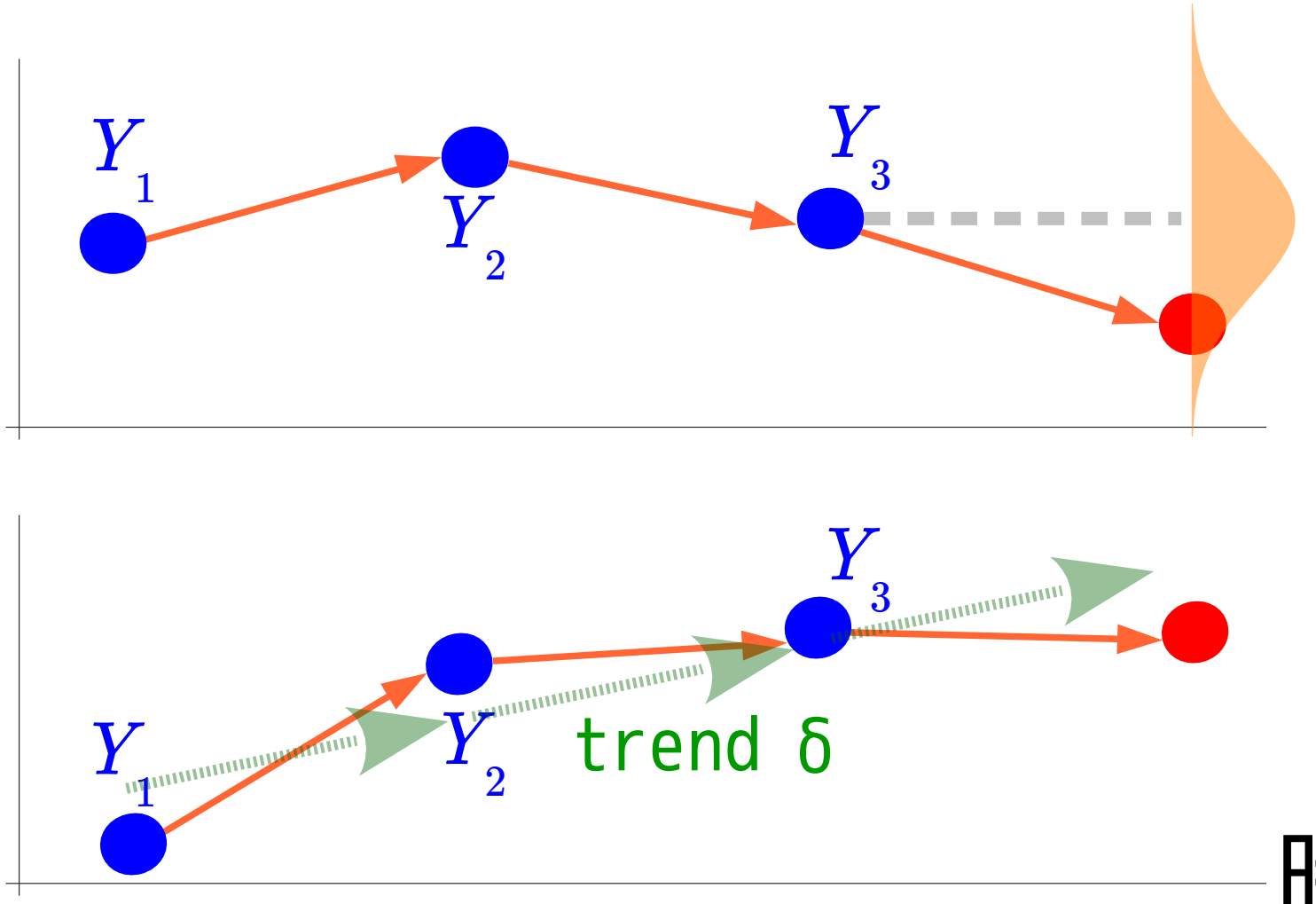
状態空間モデル：すべてを同時に推定

ランダムウォーク+各年独立なノイズ



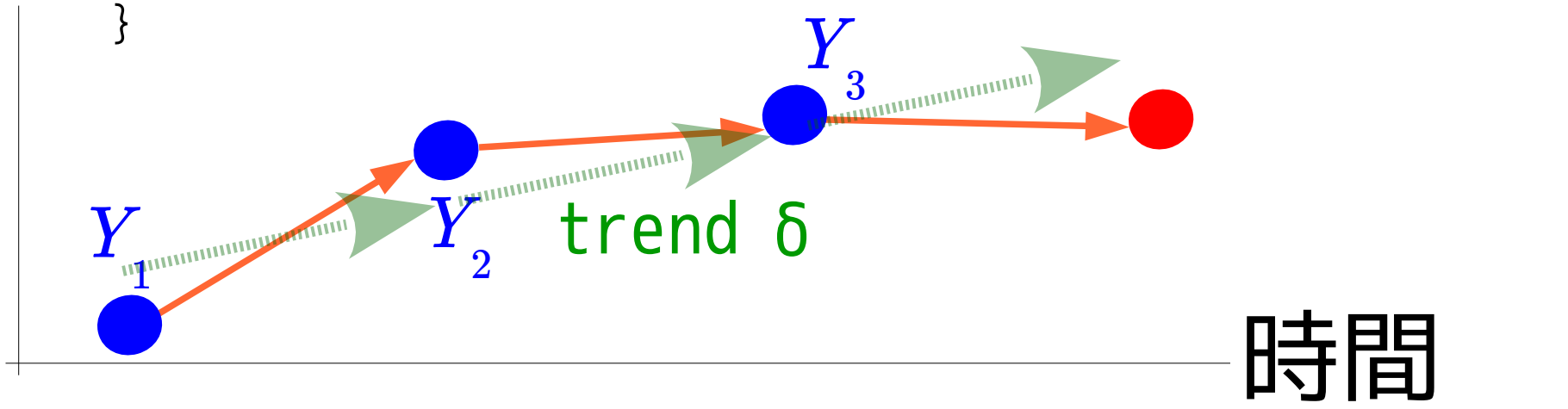
状態空間モデル：すべてを同時に推定

ランダムウォーク+各年独立なノイズ



状態空間モデル：すべてを同時に推定

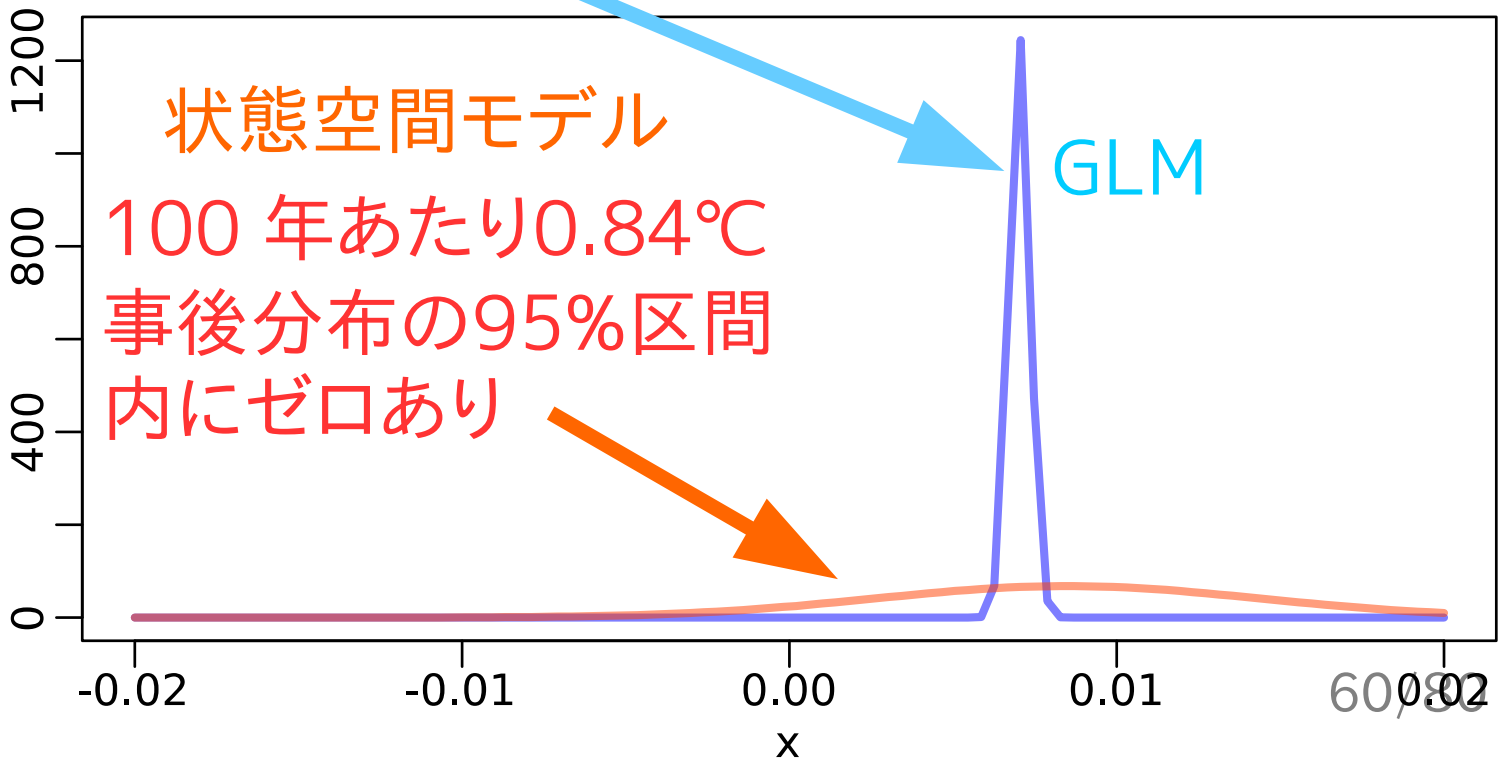
```
Y[1] ~ dnorm(y[1], tau[2])
y[1] ~ dnorm(0.0, Tau.Noninformative)
for (t in 2:N.Y) {
    Y[t] ~ dnorm(y[t], tau[2])
    y[t] ~ dnorm(m[t], tau[1])
    m[t] <- delta + y[t - 1]
}
delta ~ dnorm(0, Tau.Noninformative)
for (k in 1:2) {
    tau[k] <- 1.0 / (s[k] * s[k])
    s[k] ~ dunif(0, 1.0E+4)
}
```



状態空間モデルが予測した「温暖化」

```
> summary(glm(GL ~ year, data = d))

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1.41e+01   6.21e-01   -22.6   <2e-16
year         7.03e-03   3.18e-04    22.1   <2e-16
```

100年あたり0.70℃

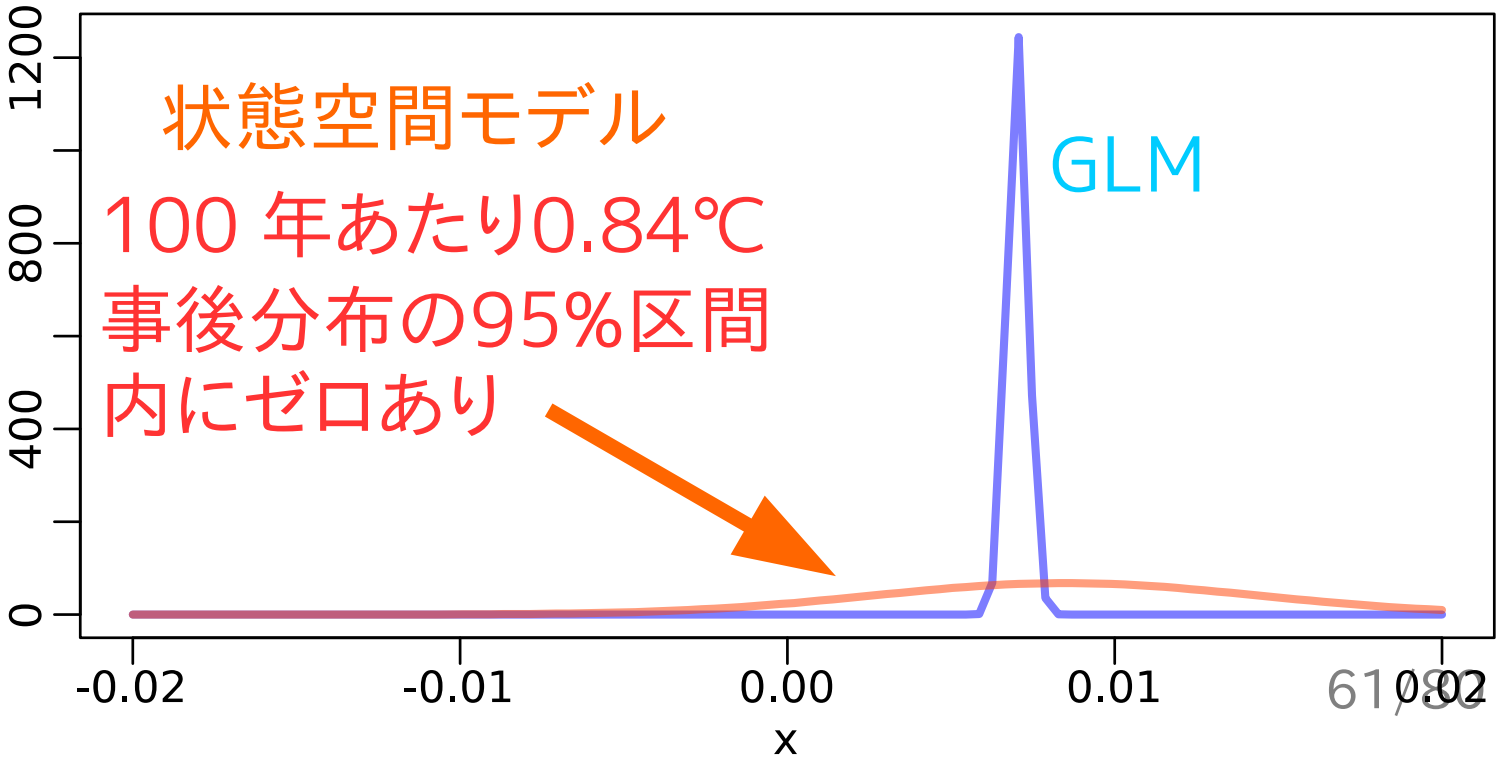


観測値間に相関あり→

実質的な

サンプルサイズが小さくなる

100年
あたり
0.70℃



疑わしい回帰
spurious regression

時系列どうしの回帰

time series Y ~ time series X

時系列データの統計モデリング でやめたほうがいいこと

- GLM: Y(t) ~ t とか Y(t) ~ X(t)
- 段階的解析:観測値の四則演算
- 「残差」の再解析
- 「対応」の無視 – 再測は時系列

「見せかけの回帰」spurious regression

spurious_regression.R

Source on Save | Run | Source

```
1 x <- cumsum(rnorm(100))
2 y <- cumsum(rnorm(100))
3 plot(ts(x), col = "blue", ylim = range(x, y))
4 lines(ts(y), col = "red")
5 print(summary(glm(y ~ x))$coefficients)
```

5:40 (Top Level) R Script

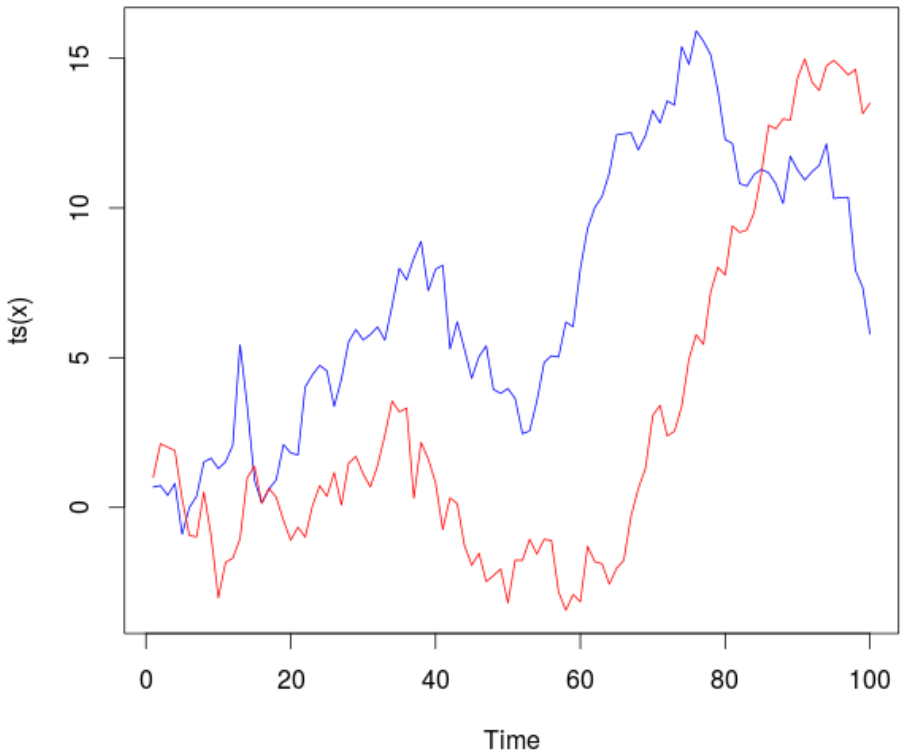
Console ~/

```
> plot(ts(x), col = "blue", ylim = range(x, y))

> lines(ts(y), col = "red")

> print(summary(glm(y ~ x))$coefficients)
             Estimate Std. Error t value   Pr(>|t|)
(Intercept) -1.67120    0.90288 -1.8510 6.7186e-02
x            0.64551    0.10803  5.9753 3.7127e-08
```

Environment | History

Files | Plots | Packages | Help | Viewer

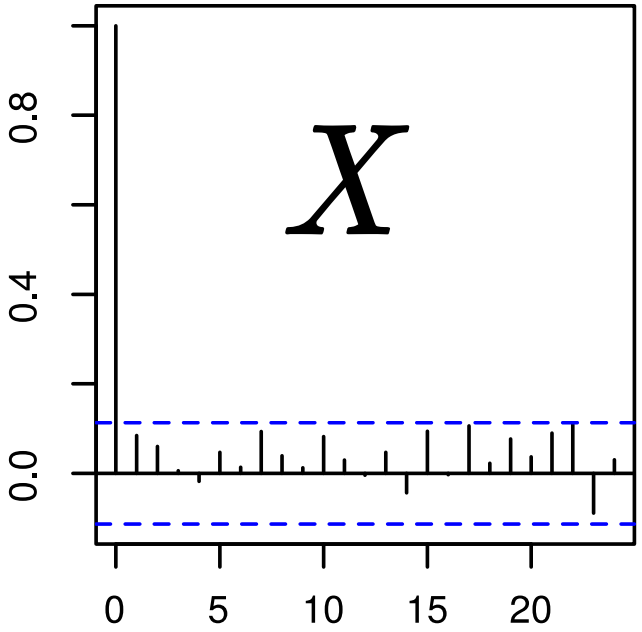
Zoom | Export | Publish

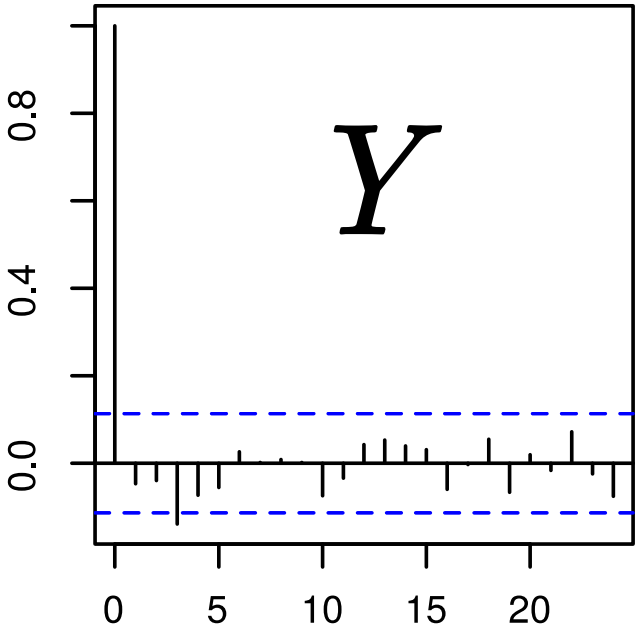


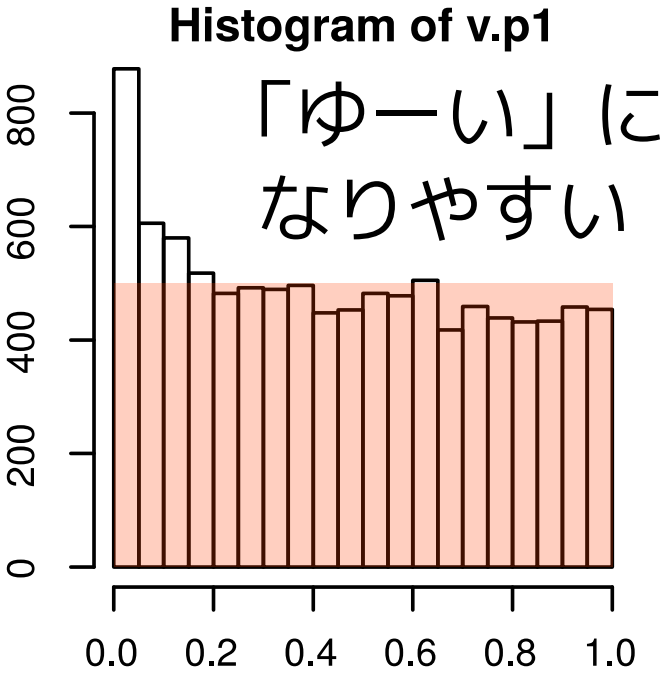
ちょっとだけ実演してみます

ノイズの大きな時系列にうもれたワナ？

時間的自己相関のない時系列？



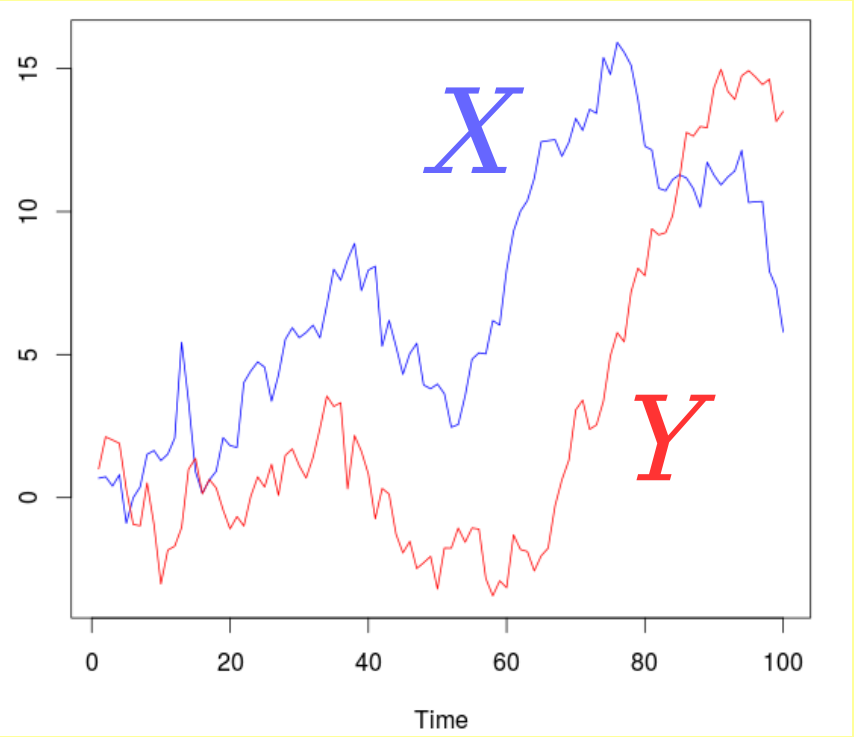




しかし glm(Y ~ X) とすると…

$Y \sim X$

疑わしい回帰
spurious regression



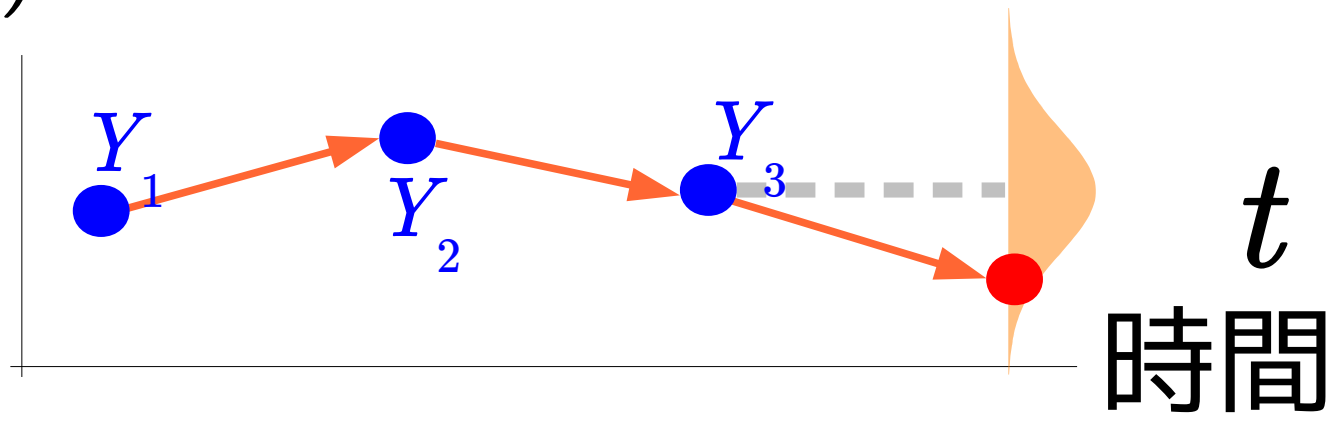
この問題も

状態空間モデル（SSM)で

解決できないだろうか?

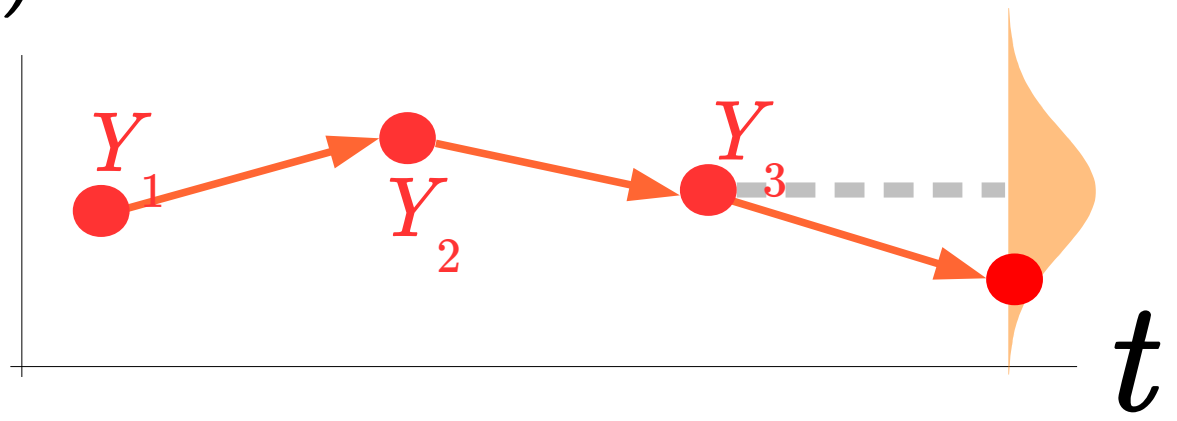
二変量のランダムウォーク
モデルを作れないか?

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$

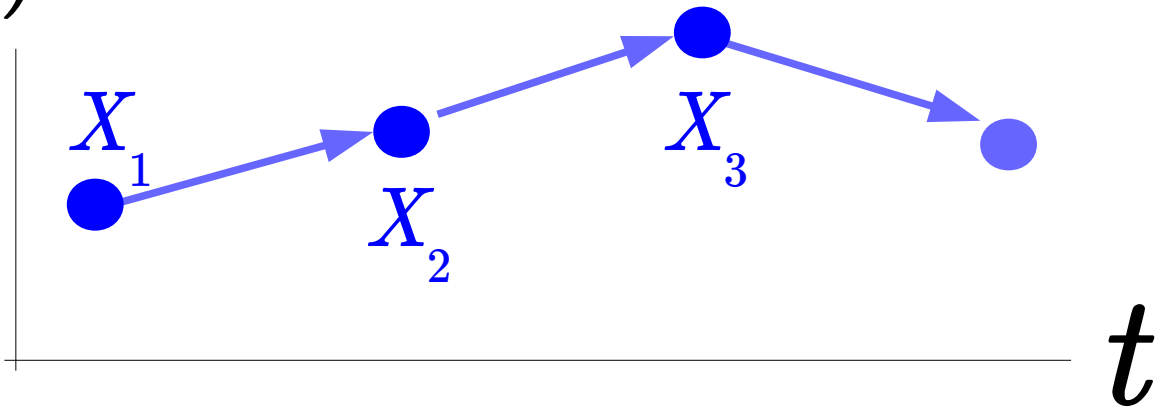


二変量のランダムウォーク
Y_t と X_t は独立

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$



$$X_{t+1} \sim N(X_t, s_x)$$



二変量のランダムウォーク

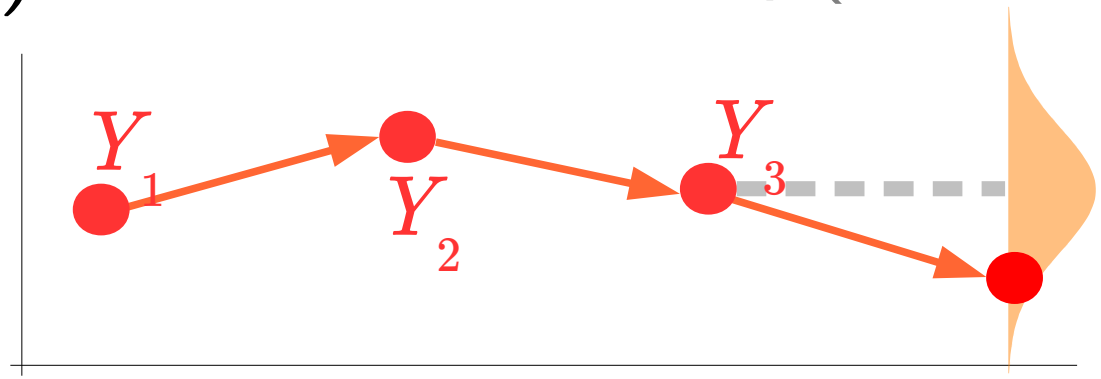
Y_t と X_t は独立

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$

$$X_{t+1} \sim N(X_t, s_x)$$

このあたりで
何とかならないか?

$$Y_{t+1} \sim N(Y_t, s_y)$$ 一変量の正規分布(密度関数)



二変量の正規分布(密度関数)

Bivariate case

In the 2-dimensional nonsingular case (k = rank(Σ) = 2), the probability density function of a vector $[X\ Y]'$ is:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

where ρ is the correlation between X and Y and where $\sigma_X > 0$ and $\sigma_Y > 0$. In this case,

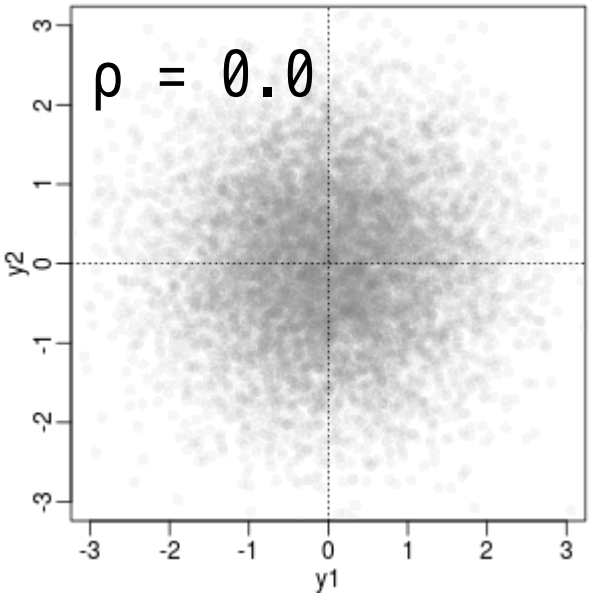
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

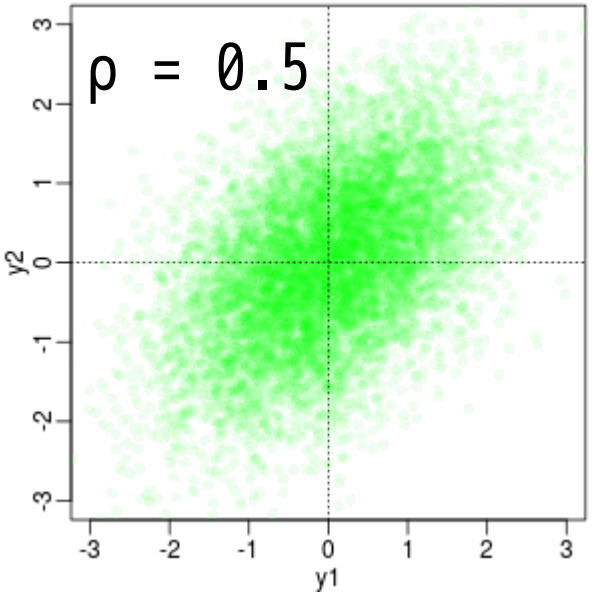
相関係数 ρ

分散共分散行列

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

無相関





正の相関

二変量の正規分布(密度関数)

Bivariate case

In the 2-dimensional nonsingular case (k = rank(Σ) = 2), the probability density function of a vector $[X\ Y]'$ is:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

where ρ is the correlation between X and Y and where $\sigma_X > 0$ and $\sigma_Y > 0$. In this case,

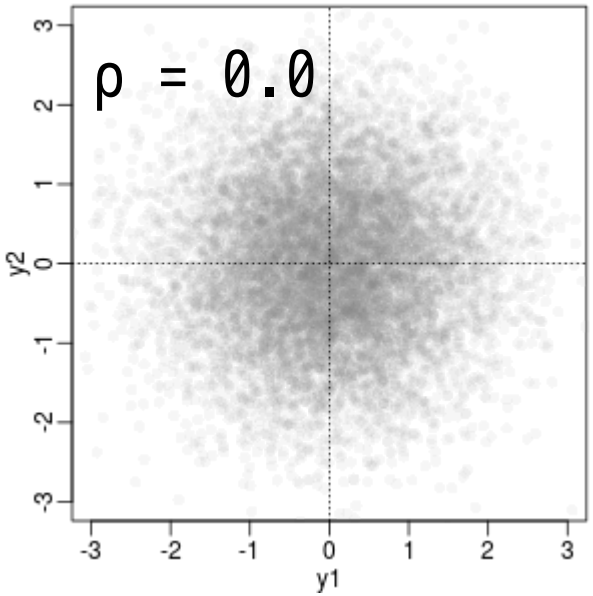
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\mu_X \\ \mu_Y\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2\end{pmatrix}.$$

分散共分散行列

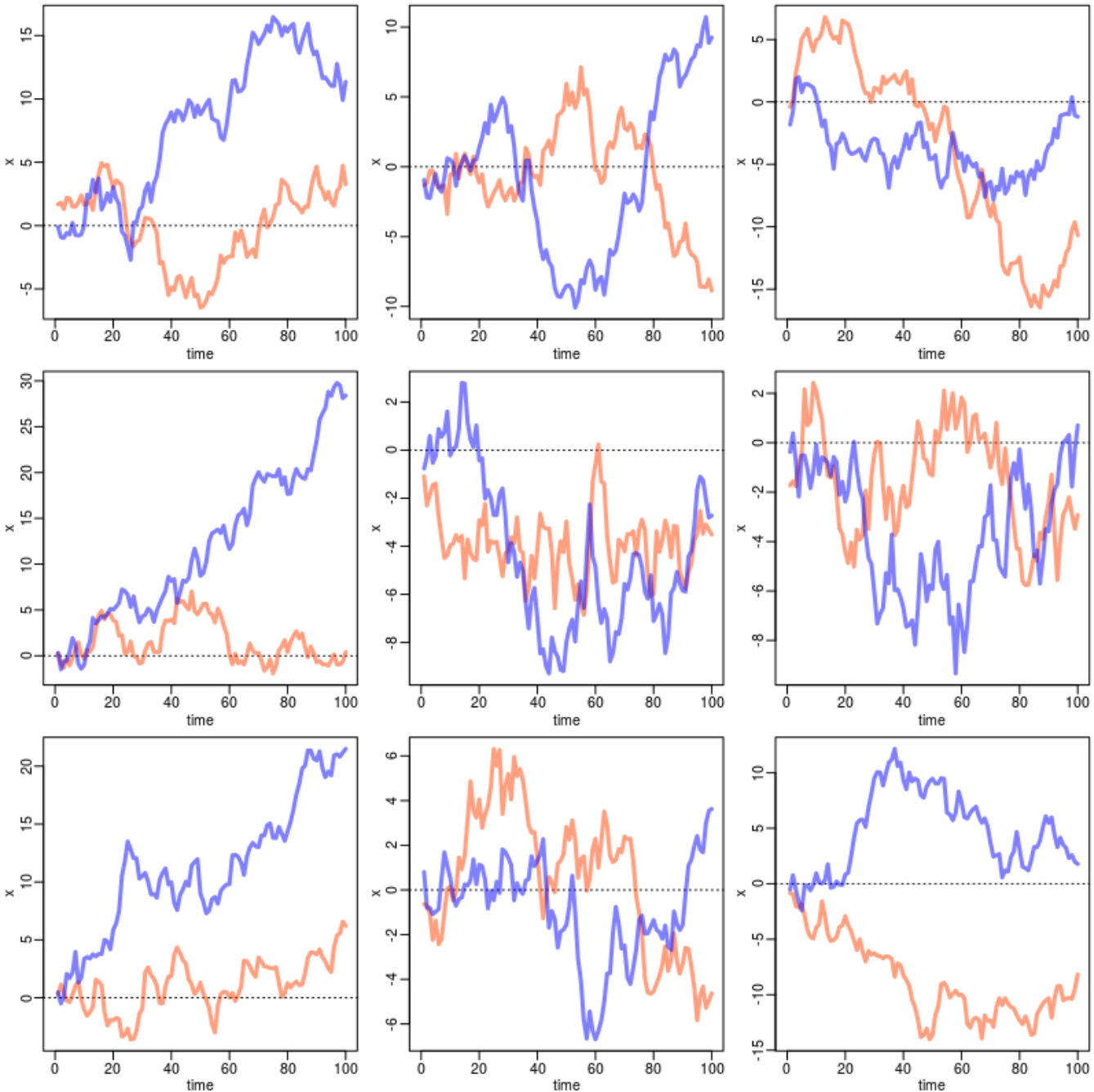
相関係数 ρ

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

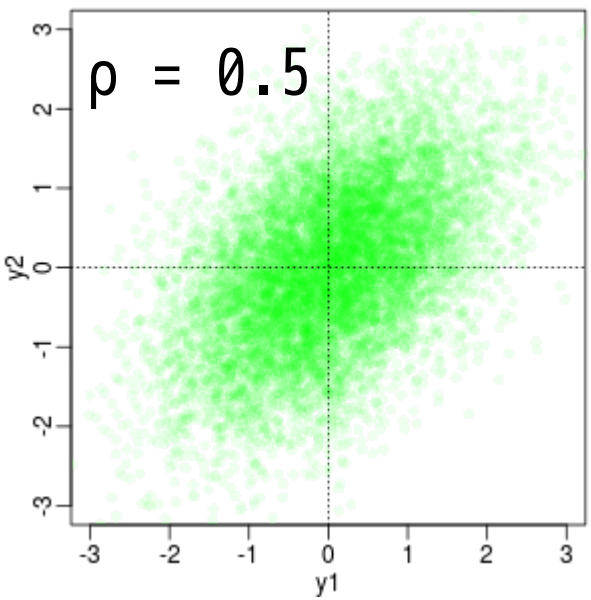
二変量正規分布とランダムウォーク　例1



無相関



二変量正規分布とランダムウォーク　例2

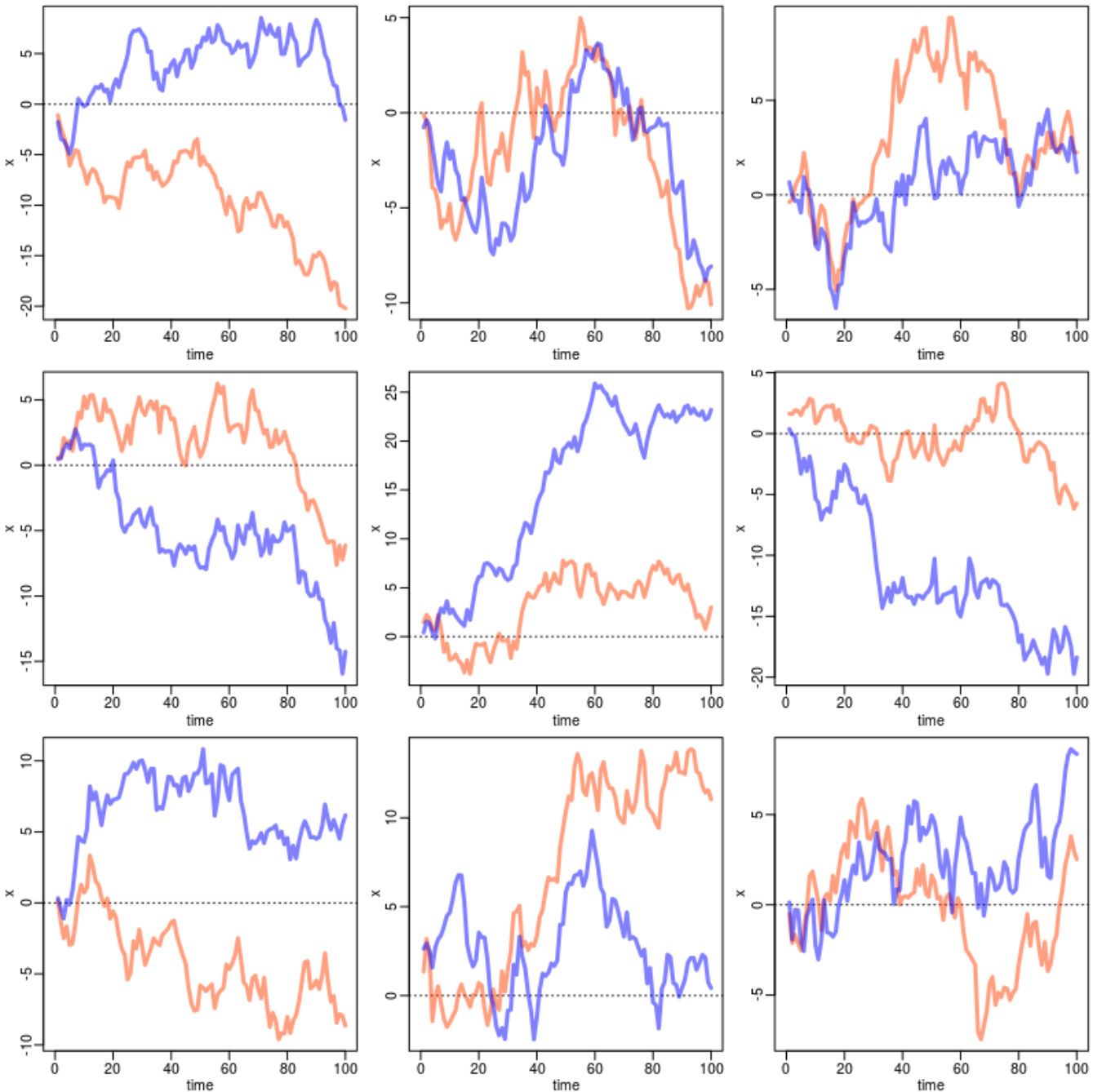


正の相関

時間があれば

demo

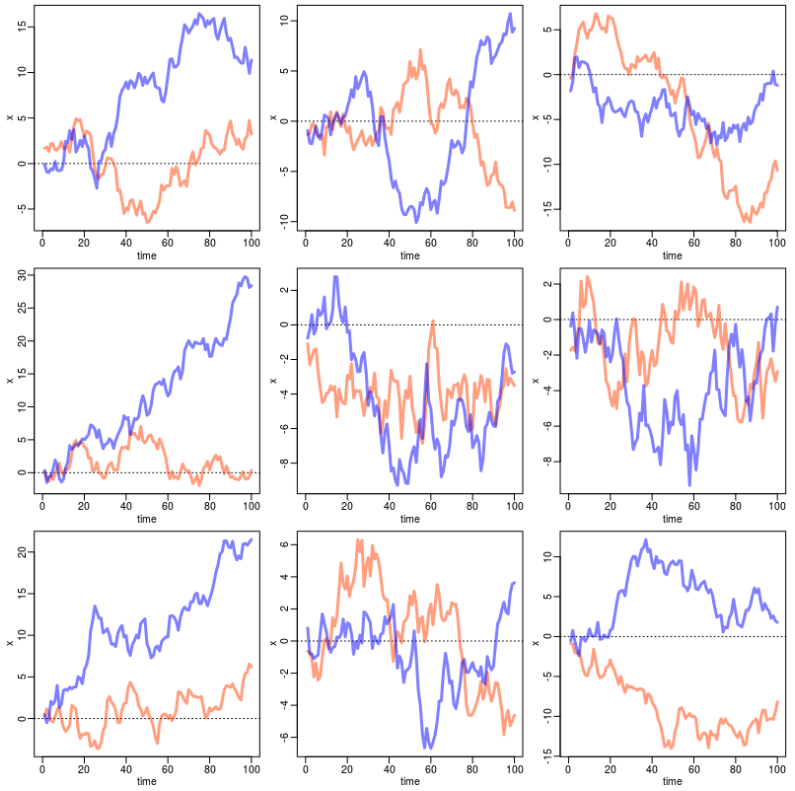
`sample_rvar.R`



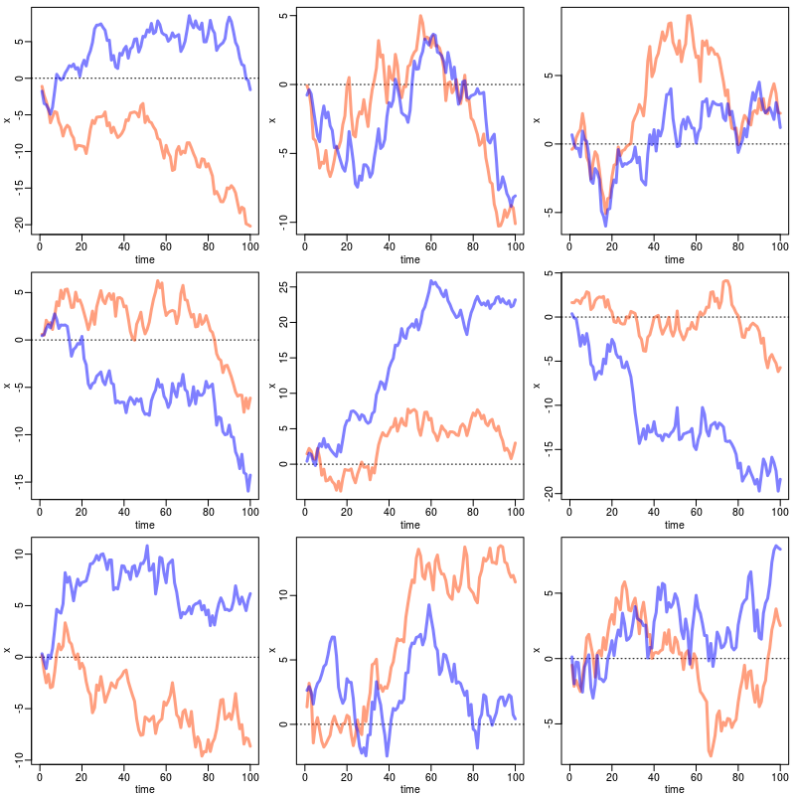
追加スライド

二変量正規分布とランダムウォーク

X と Y の相関係数 ρ を推定できるのか?



$\rho = 0.0$



$\rho = 0.5$

二変量正規分布を部品とする状態空間モデル

```
for (i in 1:N.Y) {
    Y[i, 1:2] ~ dmnorm(mu[1:2], Omega[1:2, 1:2])
}
mu[1] ~ dunif(-1.0E+4, 1.0E+4)
mu[2] ~ dunif(-1.0E+4, 1.0E+4)
Omega[1:2, 1:2] <- inverse(VarCov[1:2, 1:2])
VarCov[1, 1] <- sigma[1] * sigma[1]
VarCov[1, 2] <- sigma[1] * sigma[2] * rho
VarCov[2, 1] <- sigma[2] * sigma[1] * rho
VarCov[2, 2] <- sigma[2] * sigma[2]
sigma[1] ~ dunif(0.0, 1.0E+4)
sigma[2] ~ dunif(0.0, 1.0E+4)
rho ~ dunif(-1.0, 1.0)
```

（R で実演）

階層ベイズモデルである

状態空間モデル

から得られた事後分布

```
 3 chains, each with 5200 iterations (first 200 discarded)
 n.sims = 15000 iterations saved
           mean    sd   2.5%    25%    50%    75% 97.5%  Rhat n.eff
mu[1]    -0.122 0.110 -0.342 -0.195 -0.120 -0.048 0.090 1.001  6000
mu[2]    -0.157 0.100 -0.355 -0.224 -0.157 -0.091 0.041 1.002  1500
sigma[1]  1.091 0.079  0.949  1.036  1.086  1.142 1.261 1.001  6100
sigma[2]  0.993 0.074  0.864  0.941  0.987  1.039 1.151 1.001  4100
rho       0.568 0.070  0.420  0.523  0.573  0.617 0.693 1.001 11000
```

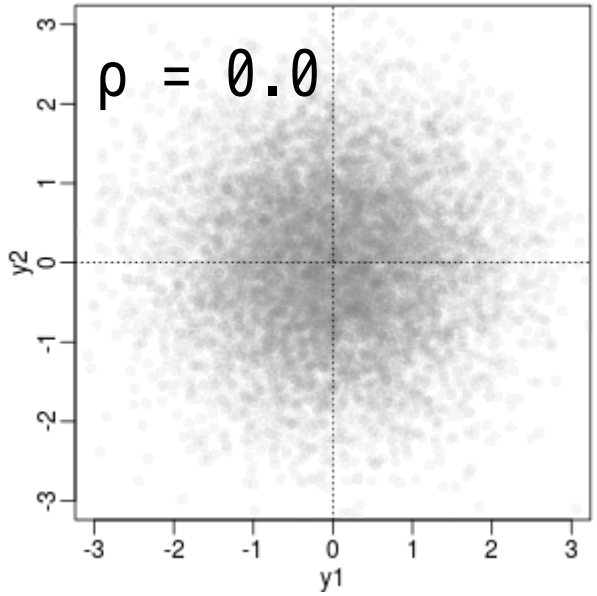
ふたつの時系列データの変動が

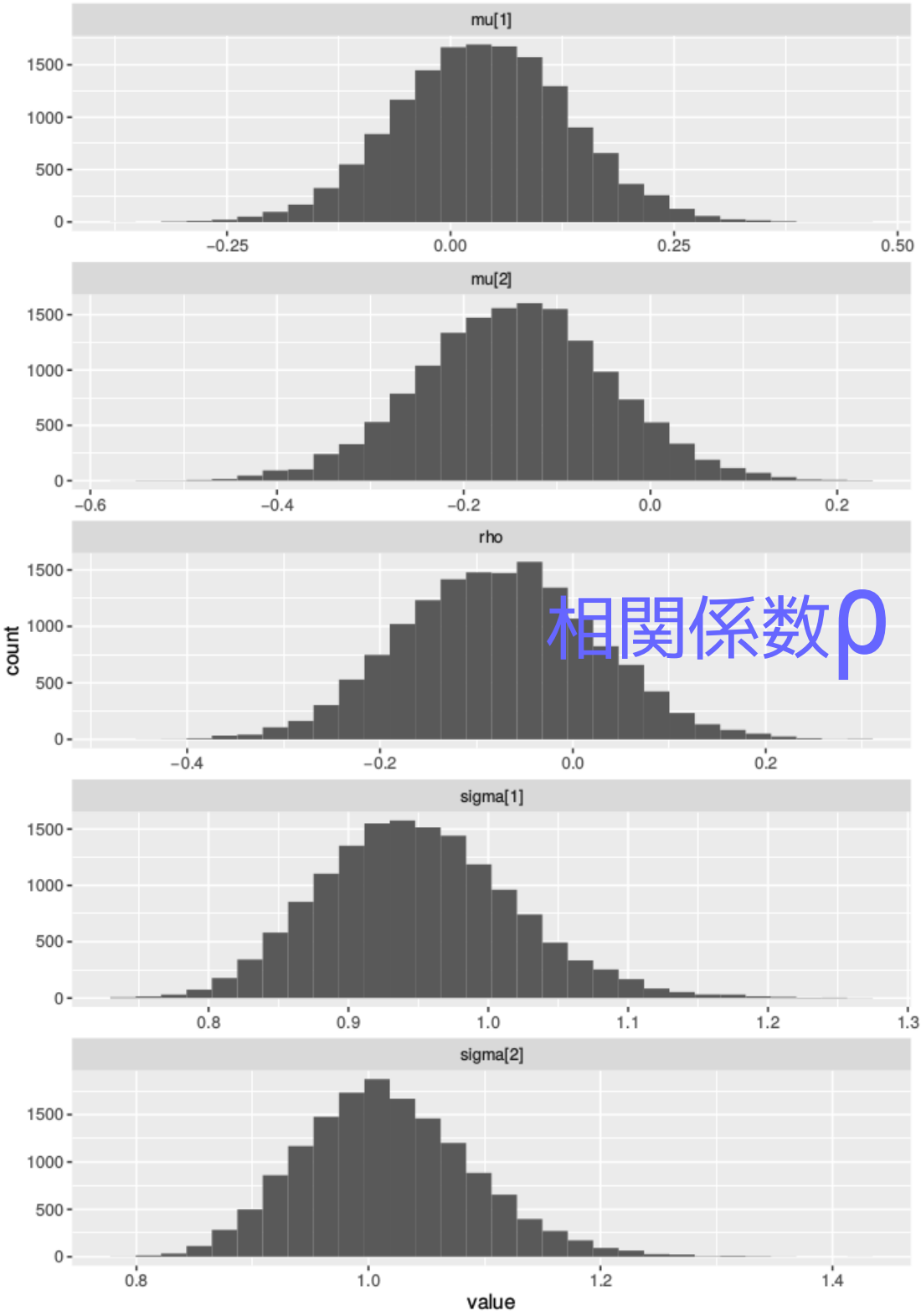
相関しているかどうかを特定できる

図示すると……

追加スライド

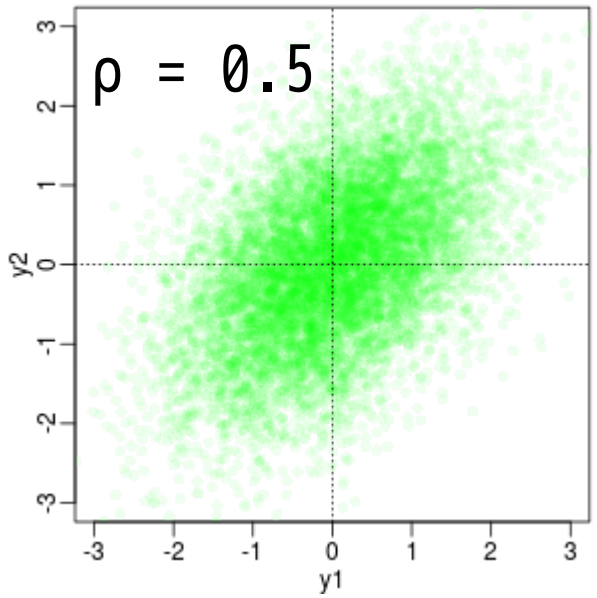
状態空間モデルのパラメーターの事後分布（ρ = 0.0）

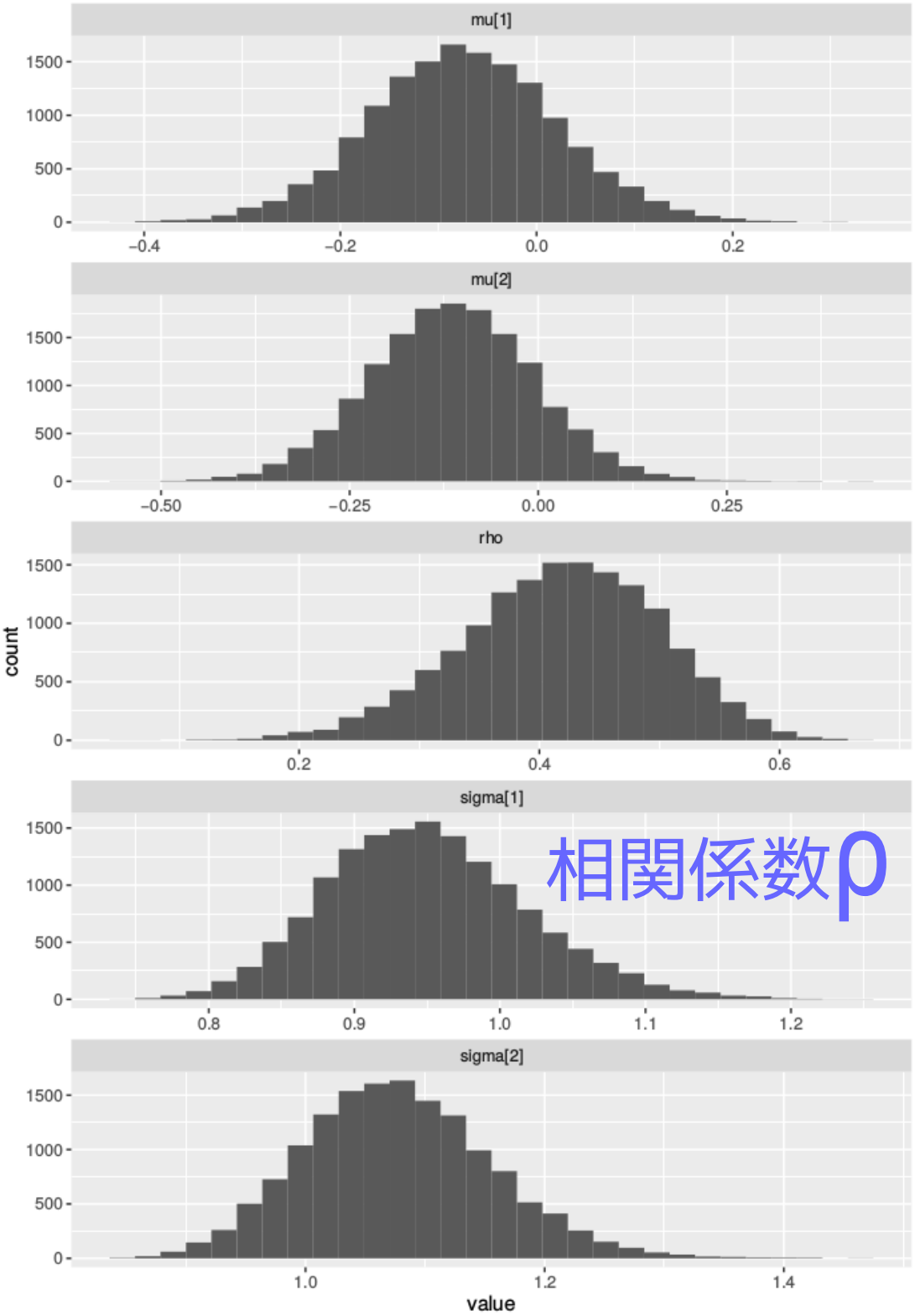




追加スライド

状態空間モデルのパラメーターの事後分布（ρ = 0.5）





時系列データの統計モデリング

- 安易に「回帰」してはいけない
- ランダムウォークモデルが基本
- 統計モデルが生成する時系列パターンを意識する
- 階層ベイズモデルで推定

状態空間モデル

統計モデリング入門，ここまで…

データの性質・構造をよくみて統計モデルを作る