

# 茨城大集中講義 2016 (e)

階層ベイズモデル – 個体差・場所差のモデリング

久保拓弥 [kubo@ees.hokudai.ac.jp](mailto:kubo@ees.hokudai.ac.jp)

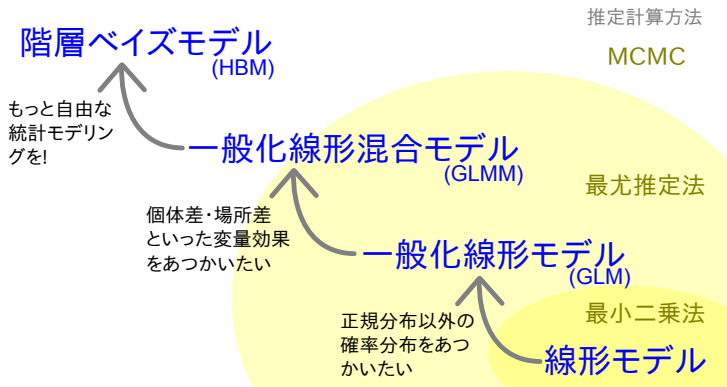
筑波大の講義 <http://goo.gl/aFLLHZ>

2016-10-06

ファイル更新時刻: 2016-09-29 13:32

# 今日の統計モデル: 階層ベイズモデル

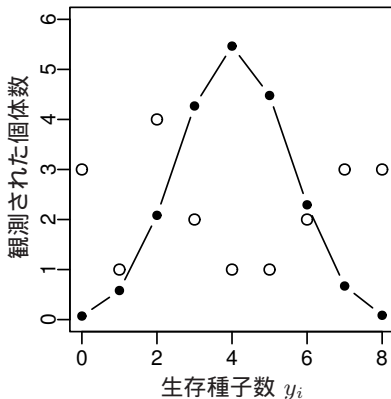
## 線形モデルの発展



そして **Markov Chain Monte Carlo (MCMC)**  
を使った Bayesian Estimation (ベイズ推定)

# GLM ではうまく説明できない観測データ

種子数分布



$N$  個のうち  $y$  個  
...という形式のデータ  
なのに  
二項分布ではまったく  
説明できない?

## 階層ベイズモデルが必要!

Apply Hierarchical Bayesian Model (HBM)!

# 今日のハナシ

## ① MCMC サンプルングのための例題

logistic regression: binomial distribution

## ② 同じような推定を MCMC でやってみる

最尤推定と Markov chain Monte Carlo (MCMC) はちがう!

## ③ Softwares for MCMC sampling

“Gibbs sampling” などが簡単にできるような……

## ④ 個体差の階層ベイズモデル

個体差のばらつきをあらわす

## ⑤ 階層ベイズモデルの推定

ソフトウェア JAGS を使ってみる

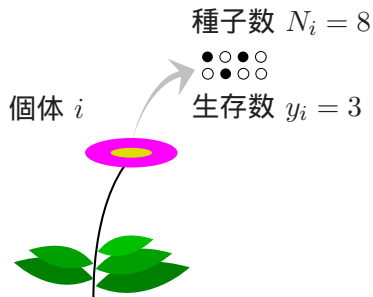
# 1. MCMC サンプルングのための例題

logistic regression: binomial distribution

and logit link function

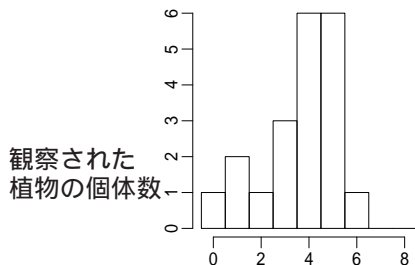
## 例題: 植物の種子の生存確率

- 架空植物の種子の生存を調べた
- 種子: 生きていれば発芽する
  - どの個体でも **8 個** の種子を調べた
- 生存確率: ある種子が生きている確率
- データ: 植物 **20** 個体, 合計 **160** 種子の生存の有無を調べた
- 73 種子が生きていた — このデータを統計モデル化したい



たとえばこんなデータが得られたとしましょう

個体ごとの生存数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
観察された個体数	1	2	1	3	6	6	1	0	0



これは個体差なしの均質な集団

## 生存確率 $q$ と二項分布の関係

- 生存確率を推定するために**二項分布** という確率分布を使う
- 個体  $i$  の  $N_i$  種子中  $y_i$  個が生存する確率

$$p(y_i | q) = \binom{N_i}{y_i} q^{y_i} (1 - q)^{N_i - y_i},$$

- ここで仮定していること
  - **個体差はない**
  - つまり **すべての個体で同じ生存確率  $q$**



ゆうど

## 尤度: 20 個体ぶんのデータが観察される確率

- 観察データ  $\{y_i\}$  が確定しているときに
- パラメータ  $q$  は値が自由にとりうると考える
- 尤度は 20 個体ぶんのデータが得られる確率の積, パラメータ  $q$  の関数として定義される

$$L(q|\{y_i\}) = \prod_{i=1}^{20} p(y_i | q)$$

---

個体ごとの生存数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
観察された個体数	1	2	1	3	6	6	1	0	0

---

## 対数尤度方程式と最尤推定

- この尤度  $L(q \mid \text{データ})$  を最大化するパラメータの推定量  $\hat{q}$  を計算したい
- 尤度を対数尤度になおすと

$$\begin{aligned}\log L(q \mid \text{データ}) &= \sum_{i=1}^{20} \log \binom{N_i}{y_i} \\ &+ \sum_{i=1}^{20} \{y_i \log(q) + (N_i - y_i) \log(1 - q)\}\end{aligned}$$

- この対数尤度を最大化するように未知パラメーター  $q$  の値を決めてやるのが**最尤推定**

## 最尤推定 (MLE) とは何か

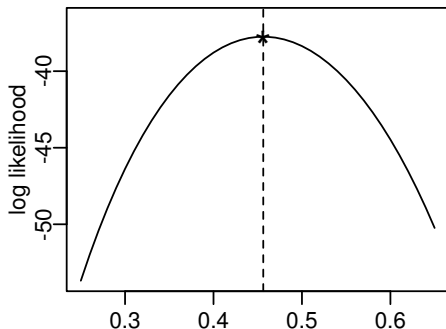
- 対数尤度  $L(q \mid \text{データ})$  が最大になるパラメーター  $q$  の値をさがすこと

- 対数尤度  $\log L(q \mid \text{データ})$  を  $q$  で偏微分して 0 となる  $\hat{q}$  が対数尤度最大

$$\partial \log L(q \mid \text{データ}) / \partial q = 0$$

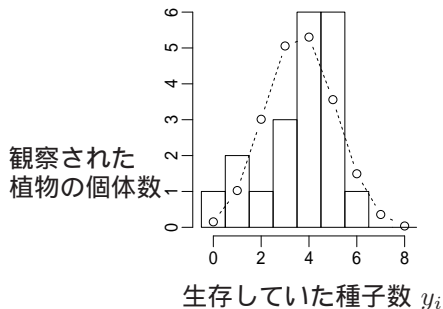
- 生存確率  $q$  が全個体共通の場合の最尤推定量・最尤推定値は

$$\hat{q} = \frac{\text{生存種子数}}{\text{調査種子数}} = \frac{73}{160} = 0.456 \text{ ぐらい}$$



# 二項分布で説明できる 8 種子中 $y_i$ 個の生存

$$\hat{q} = 0.46 \text{ なので } \binom{8}{y} 0.46^y 0.54^{8-y}$$



## 2. 同じような推定を MCMC でやってみる

最尤推定と Markov chain Monte Carlo (MCMC) はちがう!

そして “なんとなく” ベイズ統計モデルと関連づけ

## ここでやること: 尤度と MCMC の関係を考える

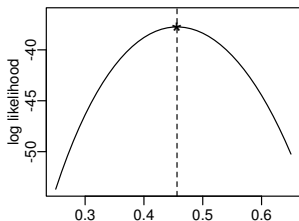
- さきほどの簡単な例題 (生存確率) のデータ解析を
- 最尤推定ではなく
- Markov chain Monte Carlo (MCMC) 法のひとつである**メトロポリス法** (Metropolis method) であつかう
- 得られる結果: 「パラメーターの値の分布」.....??

MCMC をもちださなくてもいい簡単すぎる問題  
説明のためあえてメトロポリス法を適用してみる

# メトロポリス法を説明するための準備

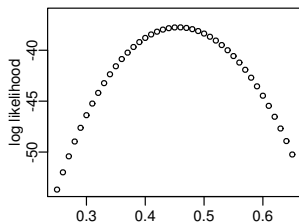
連続的な対数尤度関数

$\log L(q)$



離散化:  $q$  がとびとびの値を

とる



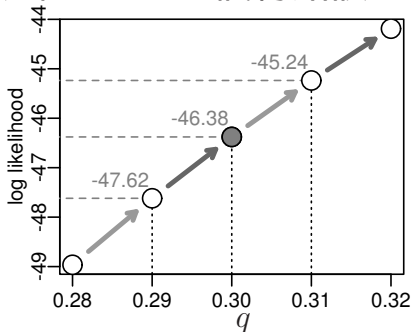
説明を簡単にするため

生存確率  $q$  の軸を離散化する

(実際には離散化する必要などない)

## 試行錯誤による $q$ の最尤推定値の探索

### ちょっと効率の悪い「試行錯誤の最尤推定」



- ①  $q$  の値の「行き先」を「両隣」どちらかにランダムに決める
- ② 「行き先」が現在の尤度より高ければ、 $q$  の値をそちらに変更
- ③ 尤度が変化しなくなるまで (1), (2) をくりかえす



## メトロポリス法のルール: この例題の場合

### ① パラメーター $q$ の初期値を選ぶ

(ここでは  $q$  の初期値が 0.3)

### ② $q$ を増やすか減らすかをランダムに決める

(新しく選んだ  $q$  の値を  $q_{\text{new}}$  としましょう)

### ③ $q_{\text{new}}$ における尤度 $L(q_{\text{new}})$ ともとの尤度 $L(q)$ を比較

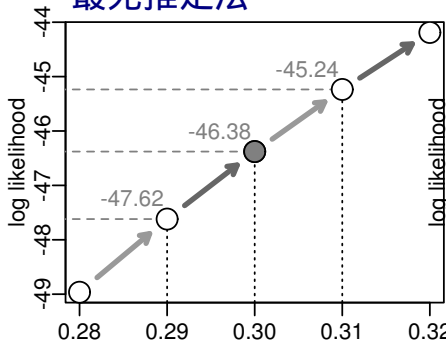
- $L(q_{\text{new}}) \geq L(q)$  (あてはまり改善):  $q \leftarrow q_{\text{new}}$
- $L(q_{\text{new}}) < L(q)$  (あてはまり改悪):
  - 確率  $r = L(q_{\text{new}})/L(q)$  で  $q \leftarrow q_{\text{new}}$
  - 確率  $1 - r$  で  $q$  を変更しない

### ④ 手順 2. にもどる

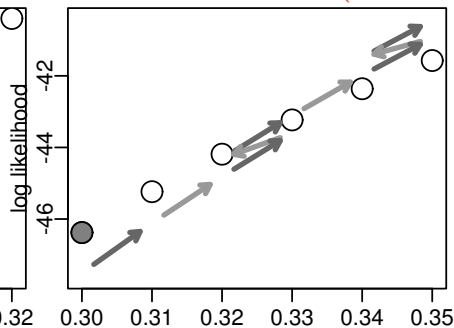
( $q = 0.01$  や  $q = 0.99$  でどうなるんだ, といった問題は省略)

# メトロポリス法のルールで $q$ を動かす

最尤推定法



メトロポリス法 (MCMC)

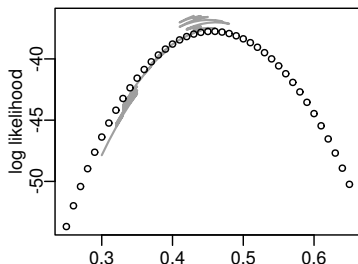


メトロポリス法だと

「単調な山のぼり」にはならない

# 対数尤度関数の「山」でうろうろする $q$ の値

メトロポリス法 (そして一般の MCMC) は  
最適化ではない

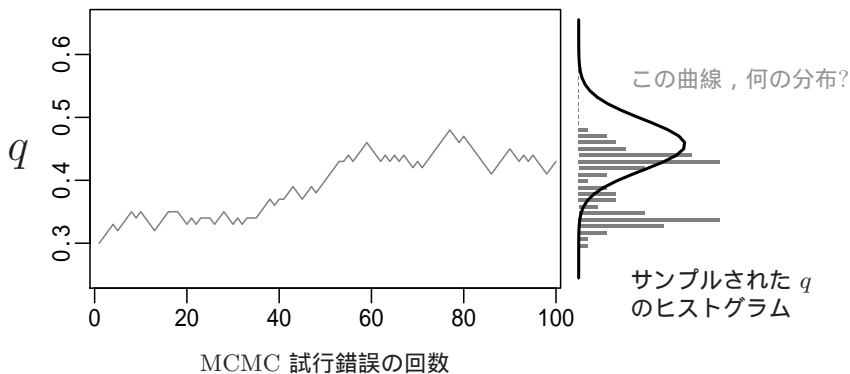


ときどきはでに落っこちる

何のためにこんなことをやるのか?

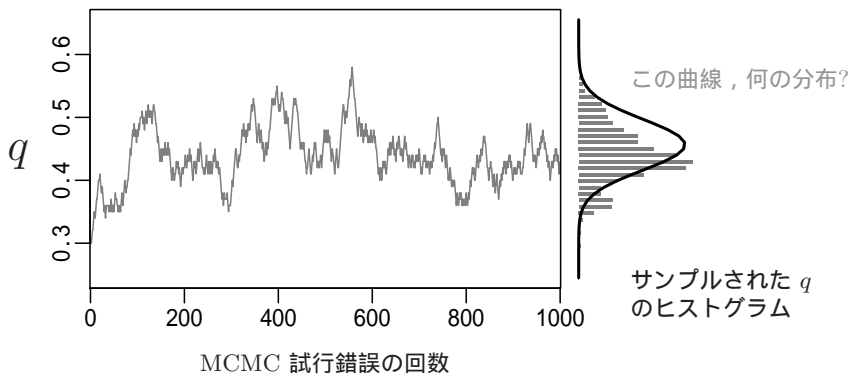
$q$  の変化していく様子を記録してみよう

# ステップごとに $q$ の値をサンプリング



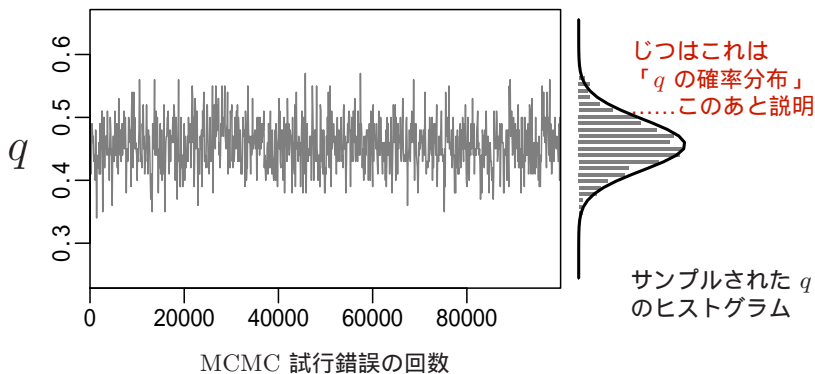
もっと試行錯誤してみたほうがいいのか?

## もっと長くサンプリングしてみる



まだまだ.....?

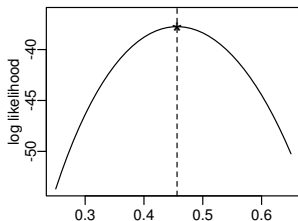
## もっともっと長くサンプリングしてみる



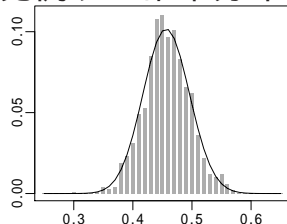
なんだか、ある「山」のかたちにとまとまったぞ?

# MCMC は何をサンプリングしている?

対数尤度  $\log L(q)$



尤度  $L(q)$  に  
比例する確率分布



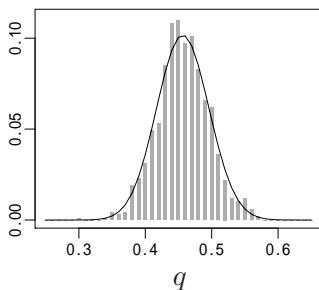
尤度に比例する確率分布からのランダムサンプル

最尤推定はパラメーターの値の点推定

MCMC は“パラメーターの事後分布” ( 推定したいこと)

は こういう分布ですよ と推定している

# MCMC の結果として得られた $q$ の経験分布



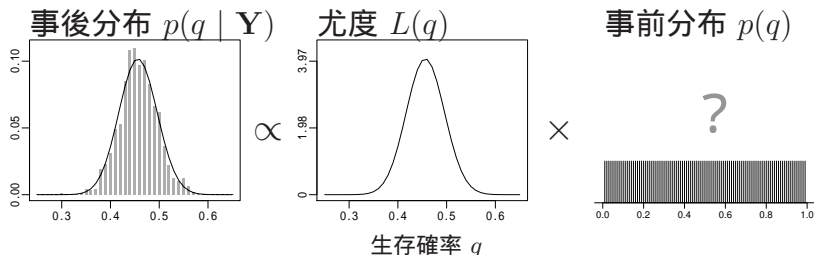
- データと統計モデル (二項分布) を決めて, MCMC サンプルングすると,  $p(q)$  からのランダムサンプルが得られる
- このランダムサンプルをもとに,  $q$  の平均や 95% 区間などがわかる — **便利じゃないか!**



# ベイズ統計モデルの推定

## 統計モデルとデータにもとづいて事後分布の推定

- パラメーター数の少ないベイズモデルであれば、尤度の数値計算やメトロポリス法で可能
- パラメーター数の多い複雑な統計モデルであれば、あとで説明する サンプリングソフトウェアを使用する



### 3. Softwares for MCMC sampling

“Gibbs sampling” などが簡単にできるような.....

事後分布から効率よくサンプリングしたい

# 統計ソフトウェア R

`http://www.r-project.org/`



## 簡単な GLMM なら R だけで推定可能

- R にはいろいろな GLMM の最尤推定関数が準備されている .....
- `library(glmML)` の `glmML()`
- `library(lme4)` の `lmer()`
- `library(nlme)` の `nlme()` (正規分布のみ)
- しかし もうちょっと複雑な GLMM , たとえば個体差 + 地域差をいれた統計モデルの最尤推定は かなり 難しい (ヘンな結果が得られたりする)
- 積分がたくさん入っている尤度関数の評価がしんどい

## どのようなソフトウェアで MCMC 計算するか?

### ① 自作プログラム

- 利点: 問題にあわせて自由に設計できる
- 欠点: 階層ベイズモデル用の MCMC プログラミング, けっこうめんどう

### ② R のベイズな package

- 利点: 空間ベイズ統計など便利な専用 package がある
- 欠点: 汎用性, とぼしい

### ③ “BUGS” で “Gibbs sampler” なソフトウェア

- 利点: 幅ひろい問題に適用できて, 便利
- 欠点というほどでもないけど, 多少の勉強が必要
- えーっと “Gibbs sampler” って何?

# さまざまな MCMC アルゴリズム

## いろいろな MCMC

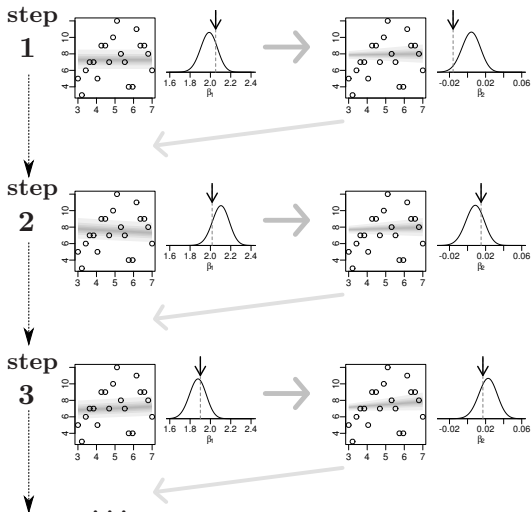
- **メトロポリス法**: 試行錯誤で値を変化させていく MCMC
  - メトロポリス・ヘイスティングス法: その改良版
- **ギブス・サンプリング**: 条件つき確率分布を使った MCMC
  - 複数の変数 (パラメーター・状態) を効率よくサンプリング

# Gibbs sampling とは何か?

- MCMC アルゴリズムのひとつ
- 複数のパラメーターの MCMC サンプリングに使う
- 例: パラメーター  $\beta_1$  と  $\beta_2$  の Gibbs sampling
  - ①  $\beta_2$  に何か適当な値を与える
  - ②  $\beta_2$  の値はそのままにして, その条件のもとでの  $\beta_1$  の MCMC sampling をする (条件つき事後分布)
  - ③  $\beta_1$  の値はそのままにして, その条件のもとでの  $\beta_2$  の MCMC sampling をする (条件つき事後分布)
  - ④ 2. - 3. をくりかえす
- 教科書の第 9 章の例題で説明

# 図解: Gibbs sampling (統計モデリング入門の第9章)

MCMC  $\beta_1$  のサンプリング  $\beta_2$  のサンプリング





## 便利な “BUGS” 汎用 Gibbs sampler たち

- BUGS 言語 (+ っぽいもの) でベイズモデルを記述できるソフトウェア
  - WinBUGS — 歴史を変えて.....さようなら?
  - OpenBUGS — 予算が足りなくて停滞?
  - JAGS — お手軽で良い, どんな OS でも動く
  - Stan — いま一番の注目
    - 今日は紹介しませんが .....
- リンク集: <http://hosho.ees.hokudai.ac.jp/~kubo/ce/BayesianMcmc.html>

えーと.....BUGS 言語って何?

## このベイズモデルを BUGS 言語で記述したい

データ  $Y[i]$   
種子数8個のうちの生存数

二項分布

$\text{dbin}(q, 8)$

生存確率  $q$

無情報事前分布

## BUGS 言語コード

```
for (i in 1:N.sample) {
  Y[i] ~ dbin(q, 8)
}
q ~ dunif(0.0, 1.0)
```

矢印は手順ではなく、依存関係をあらわしている

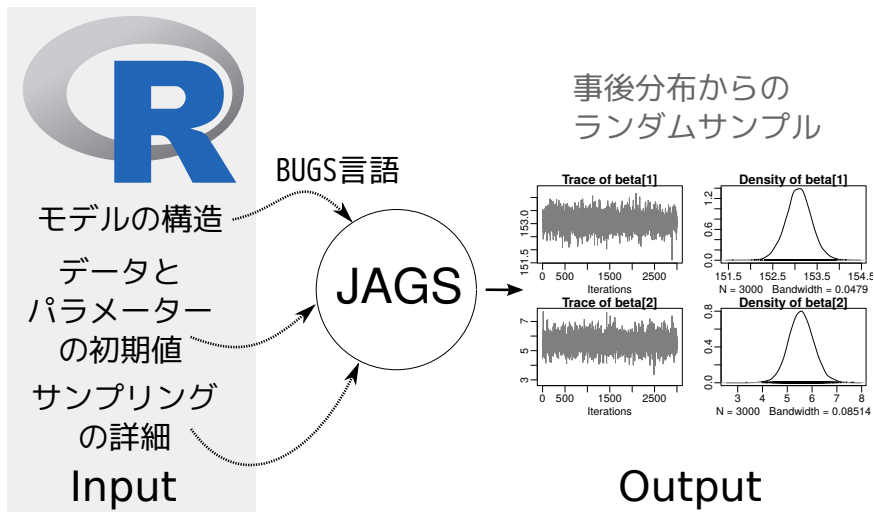
BUGS 言語: ベイズモデルを記述する言語

Spiegelhalter et al. 1995. BUGS: Bayesian Using Gibbs Sampling version 0.50.

## いろいろな OS で使える JAGS4.2.0

- R core team のひとり Martyn Plummer さんが開発
  - Just Another Gibbs Sampler
- C++ で実装されている
  - R がインストールされていることが必要
- Linux, Windows, Mac OS X バイナリ版もある
- 開発進行中
- R からの使う: `library(rjags)`

# JAGS を R の “したうけ” として使う



## R から JAGS にこんなかんじで仕事を命じる (1 / 3)

```
library(rjags)
library(R2WinBUGS) # to use write.model()

model.bugs <- function()
{
  for (i in 1:N.data) {
    Y[i] ~ dbin(q, 8) # 二項分布にしたがう
  }
  q ~ dunif(0.0, 1.0) # q の事前分布は一様分布
}

file.model <- "model.bug.txt"
write.model(model.bugs, file.model) # ファイル出力

# 次につづく.....
```

## R から JAGS にこんなかんじで仕事を命じる (2 / 3)

```
load("mcmc.RData") # (data.RData ではなく mcmc.RData!!)
list.data <- list(Y = data, N.data = length(data))
inits <- list(q = 0.5)
n.burnin <- 1000
n.chain <- 3
n.thin <- 1
n.iter <- n.thin * 1000

model <- jags.model(
  file = file.model, data = list.data,
  inits = inits, n.chain = n.chain
)
```

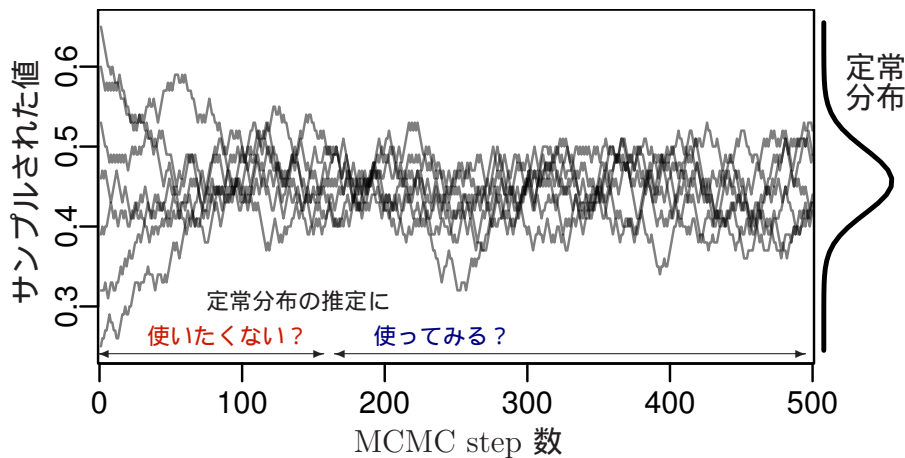
```
# まだ次につづく.....
```

## R から JAGS にこんなかんじで仕事を命じる (3 / 3)

```
# burn-in
update(model, n.burnin) # burn in

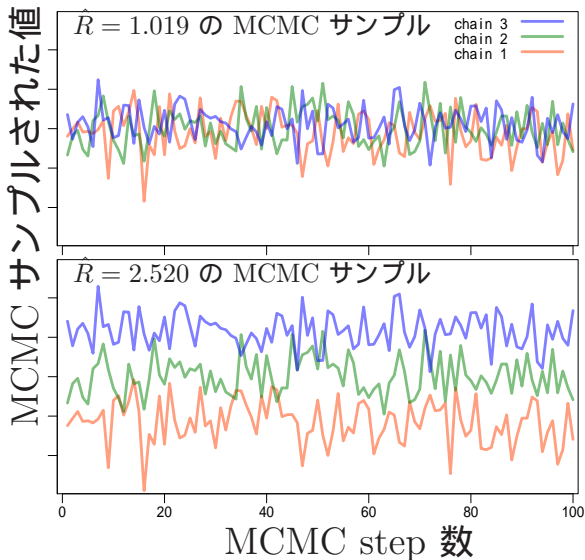
# サンプリング結果を post.mcmc.list に格納
post.mcmc.list <- coda.samples(
  model = model,
  variable.names = names(inits),
  n.iter = n.iter,
  thin = n.thin
)
# おわり
```

burn in って何? → 「使いたくない」長さの指定





## 試行間で差がないかを「診断」する



まあ、  
いいかな.....

何やら  
問題あり!

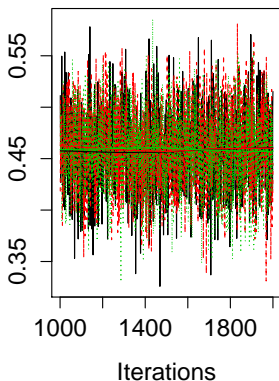
## 収束診断の $\hat{R}$ 指数

- `gelman.diag(post.mcmc.list)` → 実演表示
- $\hat{R}$  は Gelman-Rubin の収束判定用の指数
  - $\hat{R} = \sqrt{\frac{\hat{\text{var}}^+(\psi|y)}{W}}$
  - $\hat{\text{var}}^+(\psi|y) = \frac{n-1}{n}W + \frac{1}{n}B$
  - $W$  : サンプル列内の variance の平均
  - $B$  : サンプル列間の variance
  - Gelman et al. 2004. Bayesian Data Analysis. Chapman & Hall/CRC

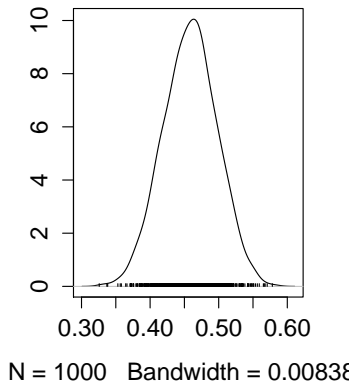
# Gibbs sampling → 事後分布の推定

- `plot(post.mcmc.list)`

### Trace of $q$



### Density of $q$



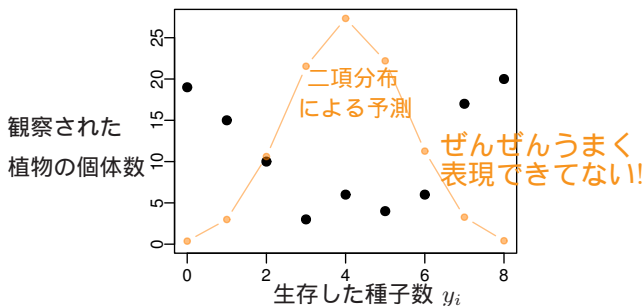
## 4. 個体差の階層ベイズモデル

個体差のばらつきをあらわす

階層事前分布の設定

## 二項分布では説明できない観測データ!

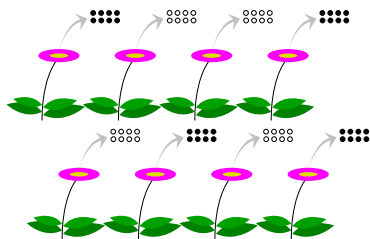
100 個体の植物の合計 800 種子中 **403 個** の生存が見られたので，平均生存確率は 0.50 と推定されたが.....



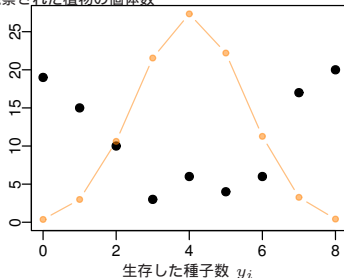
さっきの例題と同じようなデータなのに?  
(「統計モデリング入門」第 10 章の最初の例題)

# 個体差 → 過分散 (overdispersion)

極端な過分散の例



観察された植物の個体数



- 種子全体の平均生存確率は 0.5 ぐらいかもしれないが.....
- 植物個体ごとに種子の生存確率が異なる: 「個体差」
- 「個体差」があると overdispersion が生じる
- 「個体差」の原因は観測できない・観測されていない

## モデリングやりなおし: 個体差を考慮する

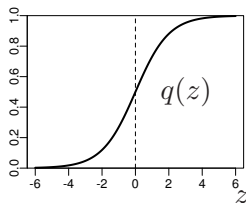
- 生存確率を推定するために **二項分布** という確率分布を使う
- 個体  $i$  の  $N_i$  種子中  $y_i$  個が生存する確率は二項分布

$$p(y_i | q_i) = \binom{N_i}{y_i} q_i^{y_i} (1 - q_i)^{N_i - y_i},$$

- ここで仮定していること
  - **個体差がある** ので個体ごとに生存確率  $q_i$  が異なる

## GLM わざ: ロジスティック関数で表現する生存確率

- 生存確率  $q_i = q(z_i)$  をロジスティック関数  $q(z) = 1/\{1 + \exp(-z)\}$  で表現



- 線形予測子  $z_i = a + r_i$  とする
  - パラメーター  $a$ : 全体の平均
  - パラメーター  $r_i$ : 個体  $i$  の個体差 (ずれ)

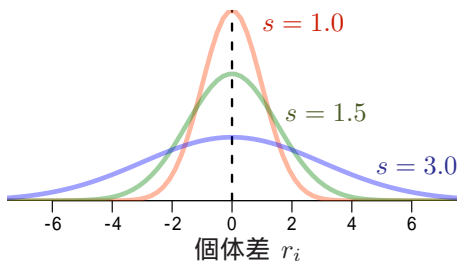


個々の個体差  $r_i$  を最尤推定するのはまずい

## パラメーター数 > サンプルサイズ

- 100 個体の生存確率を推定するためにパラメーター 101 個 ( $a$  と  $\{r_1, r_2, \dots, r_{100}\}$ ) を推定すると.....
- 個体ごとに生存数 / 種子数を計算していることと同じ! (「データのみあげ」と同じ)

そこで、次のように考えてみる

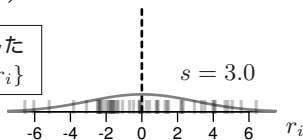
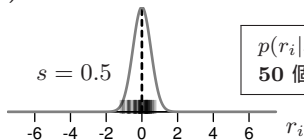
$\{r_i\}$  のばらつきは正規分布だと考えてみる

$$p(r_i | s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2s^2}\right)$$

この確率密度  $p(r_i | s)$  は  $r_i$  の「出現しやすさ」をあらわしていると解釈すればよいでしょう。  $r_i$  がゼロにちかい個体はわりと「ありがち」で、  $r_i$  の絶対値が大きな個体は相対的に「あまりいない」。

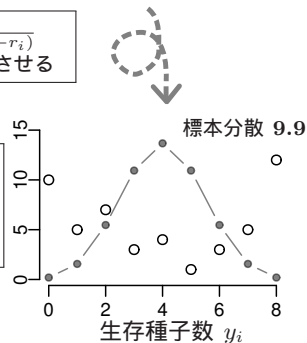
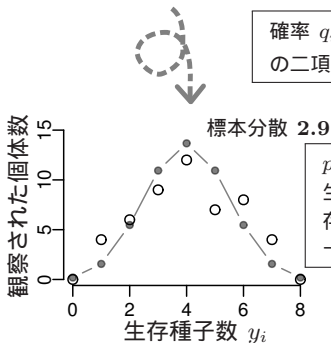
# ひとつの例示: 個体差 $r_i$ の分布と過分散の関係

(A) 個体差のばらつきが小さい場合      (B) 個体差のばらつきが大きい場合



$p(r_i|s)$  が生成した  
50 個体ぶんの  $\{r_i\}$

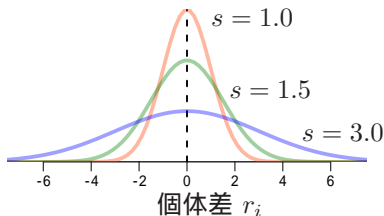
確率  $q_i = \frac{1}{1+\exp(-r_i)}$   
の二項乱数を発生させる



$p(y_i|q_i)$  が  
生成した生  
存種子数の  
一例

# これは $r_i$ の事前分布の指定，ということ

前回の講義で  $\{r_i\}$  は正規分布にしたがうと仮定したが  
ベイズ統計モデリングでは「100 個の  $r_i$  たちに  
共通する事前分布として正規分布を指定した」  
ということになる



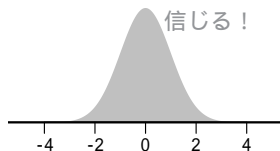
$$p(r_i | s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2s^2}\right)$$

## ベイズ統計モデルでよく使われる三種類の事前分布

たいていのベイズ統計モデルでは，ひとつのモデルの中で複数の種類の事前分布を混ぜて使用する．

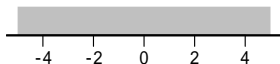
(A) 主観的な事前分布

(できれば使いたくない!)

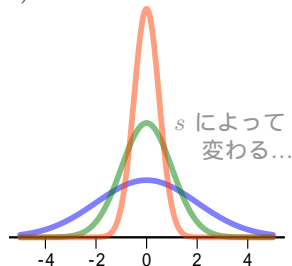


(B) 無情報事前分布

わからない?



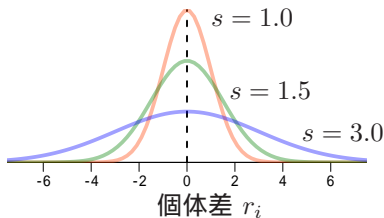
(C) 階層事前分布



$r_i$  の事前分布として階層事前分布を指定する

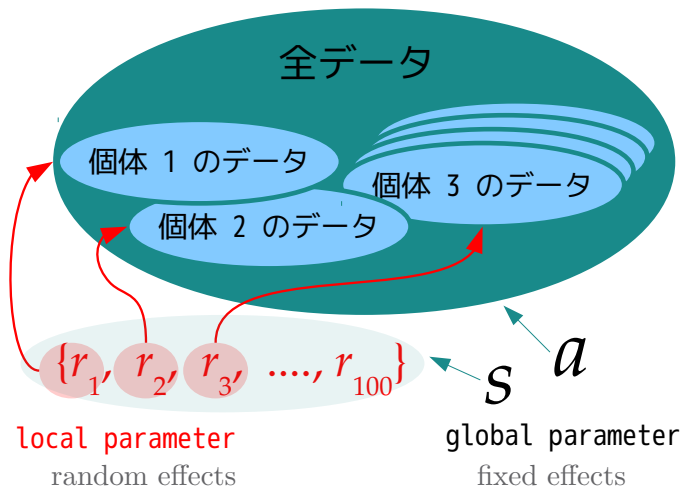
## 階層事前分布の利点

「データにあわせて」事前分布が変形!



$$p(r_i | s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2s^2}\right)$$

## 統計モデルの大域的・局所的なパラメーター

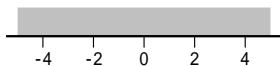


データのどの部分を説明しているのか?

# パラメーターごとに適切な事前分布を選ぶ

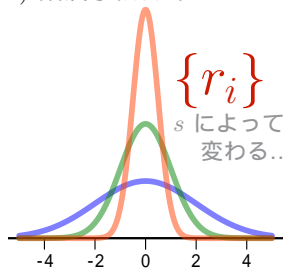
(B) 無情報事前分布

$a, s$   
わからない?



(C) 階層事前分布

$\{r_i\}$   
 $s$  によって  
変わる...



パラメーターの  
種類

説明する範囲

事前分布

全体に共通する平均・ばらつき

大域的

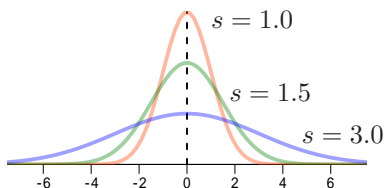
無情報事前分布

個体・グループごとのずれ

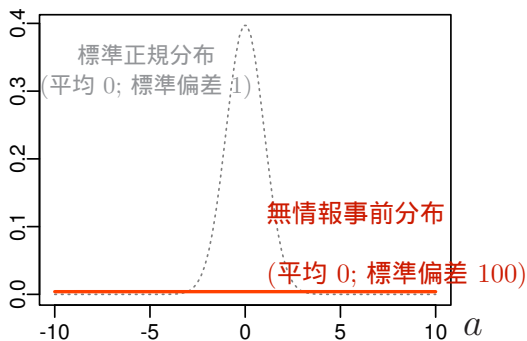
局所的

階層事前分布



個体差  $\{r_i\}$  のばらつき  $s$  の無情報事前分布

- $s$  はどのような値をとってもかまわない
- そこで  $s$  の事前分布は **無情報事前分布** (non-informative prior) とする
- たとえば一様分布, ここでは  $0 < s < 10^4$  の一様分布としてみる

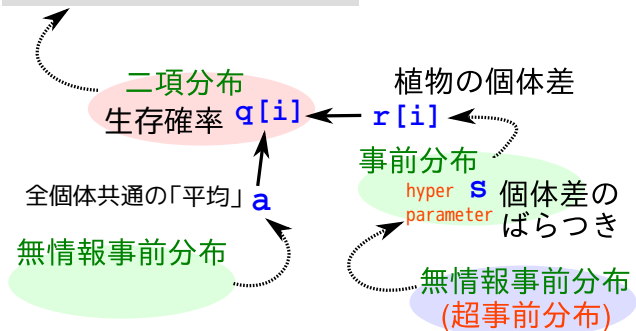
全個体の「切片」  $a$  の無情報事前分布

「生存確率の (logit) 平均  $a$  は何でもよい」と表現している

# 階層ベイズモデル: 事前分布の階層性

超事前分布 → 事前分布という階層があるから

データ 種子8個のうち  
 $y[i]$  が生存



矢印は手順ではなく、依存関係をあらわしている

## 5. 階層ベイズモデルの推定

ソフトウェア JAGS を試してみる

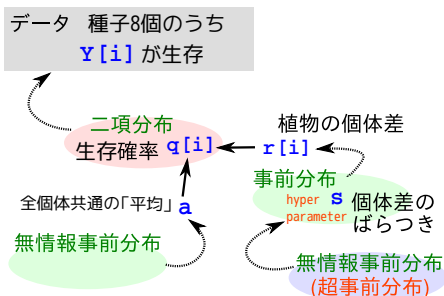
R の “したうけ” として JAGS を使う

## 階層ベイズモデルを BUGS コードで記述する

```

model
{
  for (i in 1:N.data) {
    Y[i] ~ dbin(q[i], 8)
    logit(q[i]) <- a + r[i]
  }
  a ~ dnorm(0, 1.0E-4)
  for (i in 1:N.data) {
    r[i] ~ dnorm(0, tau)
  }
  tau <- 1 / (s * s)
  s ~ dunif(0, 1.0E+4)
}

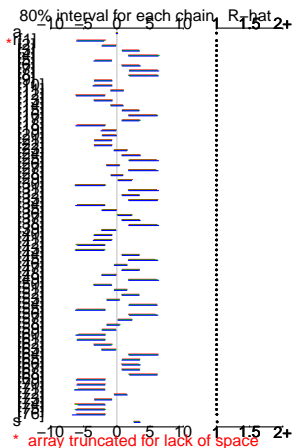
```



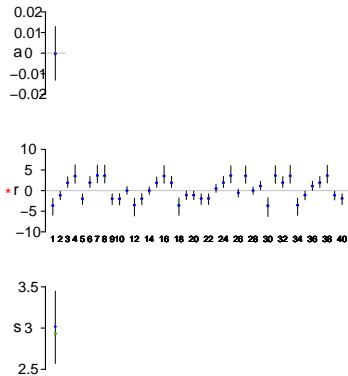
## JAGS で得られた事後分布サンプルの要約

```
> source("mcmc.list2bugs.R") # なんとなく便利なので...
> post.bugs <- mcmc.list2bugs(post.mcmc.list) # bugs クラスに変換
```

3 chains, each with 4000 iterations (first 2000 discarded)



medians and 80% intervals



## bugs オブジェクトの post.bugs を調べる

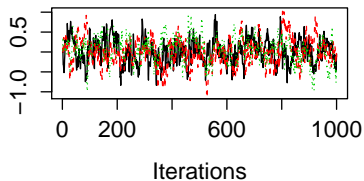
- `print(post.bugs, digits.summary = 3)`
- 事後分布の 95% 信頼区間などが表示される

```
3 chains, each with 4000 iterations (first 2000 discarded), n.thin = 2
n.sims = 3000 iterations saved
```

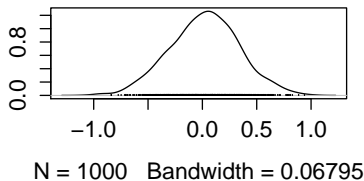
	mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	Rhat	n.eff
a	0.020	0.321	-0.618	-0.190	0.028	0.236	0.651	1.007	380
s	3.015	0.359	2.406	2.757	2.990	3.235	3.749	1.002	1200
r[1]	-3.778	1.713	-7.619	-4.763	-3.524	-2.568	-1.062	1.001	3000
r[2]	-1.147	0.885	-2.997	-1.700	-1.118	-0.531	0.464	1.001	3000
r[3]	2.014	1.074	0.203	1.282	1.923	2.648	4.410	1.001	3000
r[4]	3.765	1.722	0.998	2.533	3.558	4.840	7.592	1.001	3000
r[5]	-2.108	1.111	-4.480	-2.775	-2.047	-1.342	-0.164	1.001	2300
...	(中略)								
r[99]	2.054	1.103	0.184	1.270	1.996	2.716	4.414	1.001	3000
r[100]	-3.828	1.766	-7.993	-4.829	-3.544	-2.588	-1.082	1.002	1100

## 各パラメーターの事後分布サンプルを R で調べる

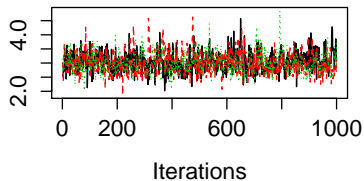
Trace of a



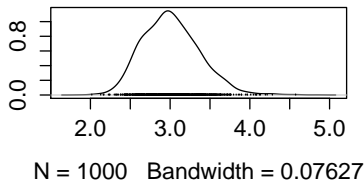
Density of a



Trace of s



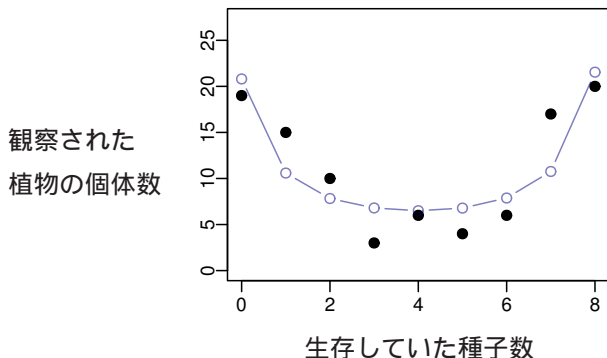
Density of s





## 得られた事後分布サンプルを組みあわせて予測

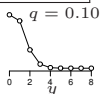
- `post.mcmc <- to.mcmc(post.bugs)`
- これは `matrix` と同じようにあつかえるので、作図に便利
- .....このあとごちゃごちゃと計算する必要あるけど、省略.....



個体差  $r_i$  について積分する  
ということは  
二項分布と正規分布をまぜ  
あわせること

個体差  $r$  ごとに異なる  
二項分布

$$r = -2.20$$



⋮

×

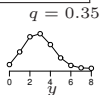
集団内の  $r$  の分布  
重み  $p(r | s)$

$$p(r) = 0.10$$



二項分布と正規分布のませあわせ

$$r = -0.60$$



⋮

×

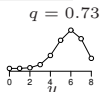
$$p(r) = 0.13$$



積分

集団全体をあらわす  
混合された分布

$$r = 1.00$$



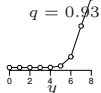
⋮

×

$$p(r) = 0.13$$



$$r = 2.60$$



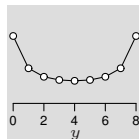
⋮

×

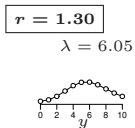
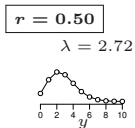
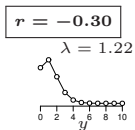
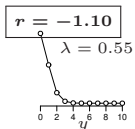
$$p(r) = 0.09$$



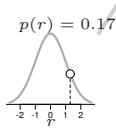
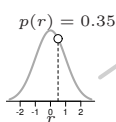
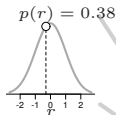
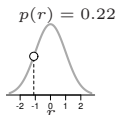
⋮



個体差  $r$  ごとに異なる  
ポアソン分布



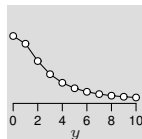
集団内の  $r$  の分布  
重み  $p(r | s)$



ポアソン分布と正規分布のませあわせ

積分

集団全体をあらわす  
混合された分布



# 次回予告

## 時間変化データの階層ベイズモデル