統計モデリング入門 2016 (c)

Poisson regression, a generalized linear model (GLM)
一般化線形モデル: ポアソン回帰

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp

北大環境科学院の講義 http://goo.gl/76c4i

2016–07–13

ファイル更新時刻: 2016–07–12 14:07

agenda

今日のハナシ I

Poisson regression

1. **ポアソン回帰の統計モデル**

   response variable　explanatory variable

   応答変数 y **と　説明変数** x

2. **ポアソン回帰の例題: 架空植物の種子数データ**

   植物個体の属性，あるいは実験処理が種子数に影響?

   how to specify GLM

3. **GLM の詳細を指定する**

   probability distribution, linear predictor and link function

   確率分布・線形予測子・リンク関数

4. **R で GLM のパラメーターを推定**

   あてはまりの良さは対数尤度関数で評価

5. **処理をした・しなかった 効果も統計モデルに入れる**

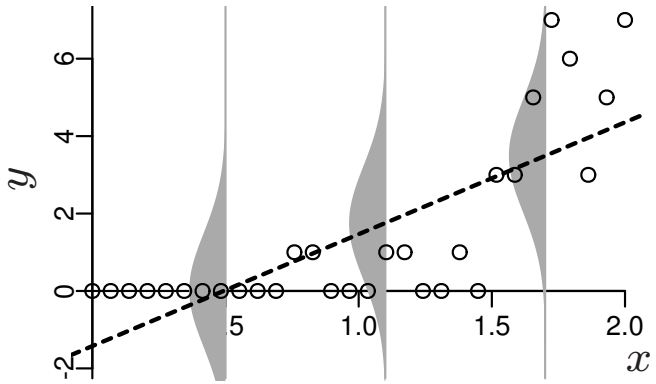
   factor type

   GLM の 因子型説明変数

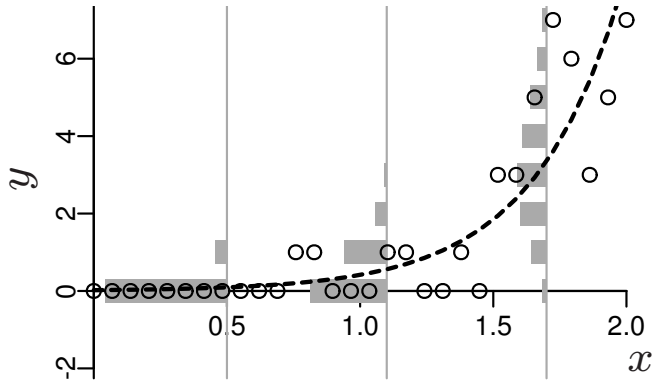
agenda

今日のハナシ II

正規分布・恒等リンク関数の統計モデル

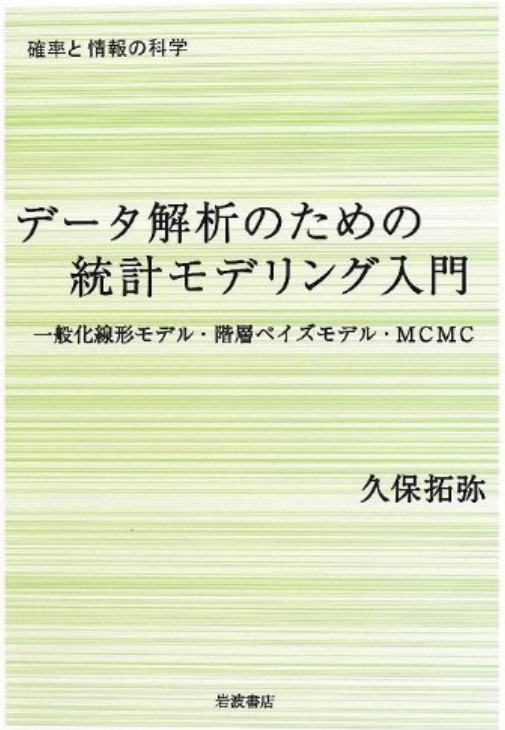


ポアソン分布・log リンク関数の統計モデル



今日の内容と「統計モデリング入門」との対応

http://goo.gl/Ufq2



今日はおもに「第 3 章 一般化線形モデル (GLM)」の内容を説明します.

- 著者: 久保拓弥
- 出版社: 岩波書店
- 2012–05–18 刊行

一般化線形モデルって何だろう?

Generalized Linear Model

一般化線形モデル (GLM)

- **ポアソン回帰** (Poisson regression)
- **ロジスティック回帰** (logistic regression)
- **直線回帰** (linear regression)
- ……

Poisson regression

1. ポアソン回帰の統計モデル

response variable　explanatory variable

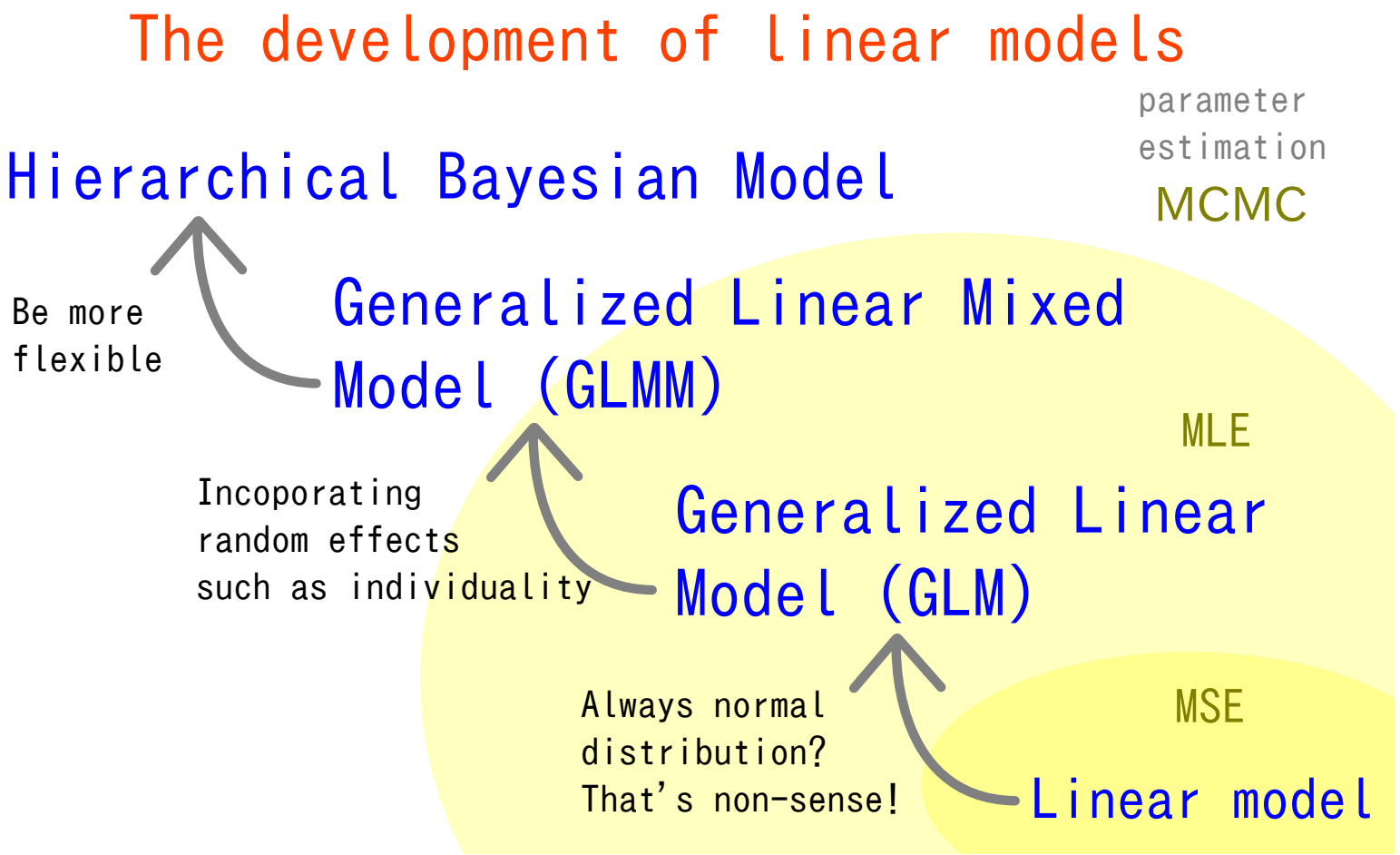
応答変数 y　と　説明変数 x

一般化線形モデルにとりくんでみる

応答変数 y と 説明変数 x

statistaical models appeared in the class

この授業であつかう統計モデルたち

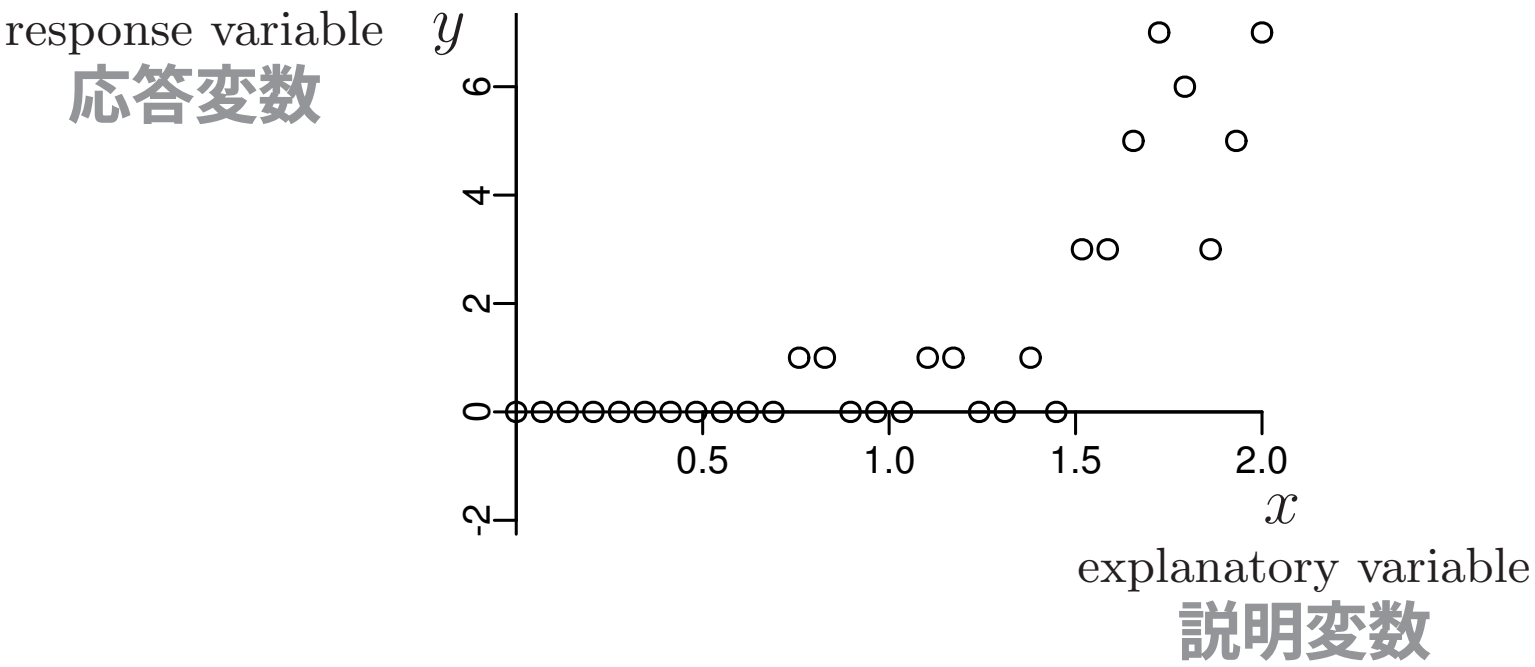


Kubo Doctrine: "Learn the evolution of linear-model family, firstly!"

suppose that you have a "count data" set ...

0 個, 1 個, 2 個と数えられるデータ

カウントデータ $(y \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ **なデータ**$)$



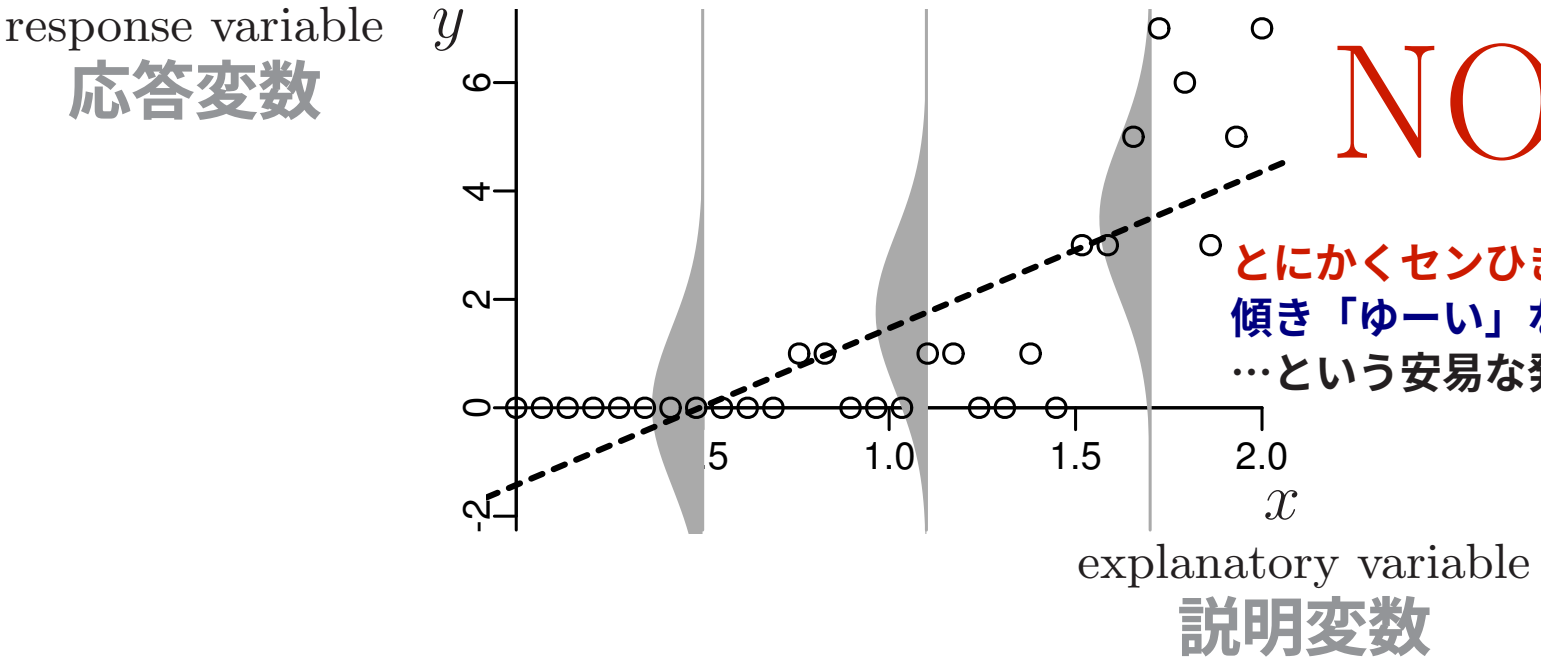
- **たとえば** x **は植物個体の大きさ，** y **はその個体の花数**
- **体サイズが大きくなると花数が増えるように見えるが……**
- **この現象を表現する統計モデルは?**

応答変数 y と 説明変数 x

the normal distribution sucks!

正規分布を使った統計モデル …… ムリがある?

正規分布・恒等リンク関数の統計モデル



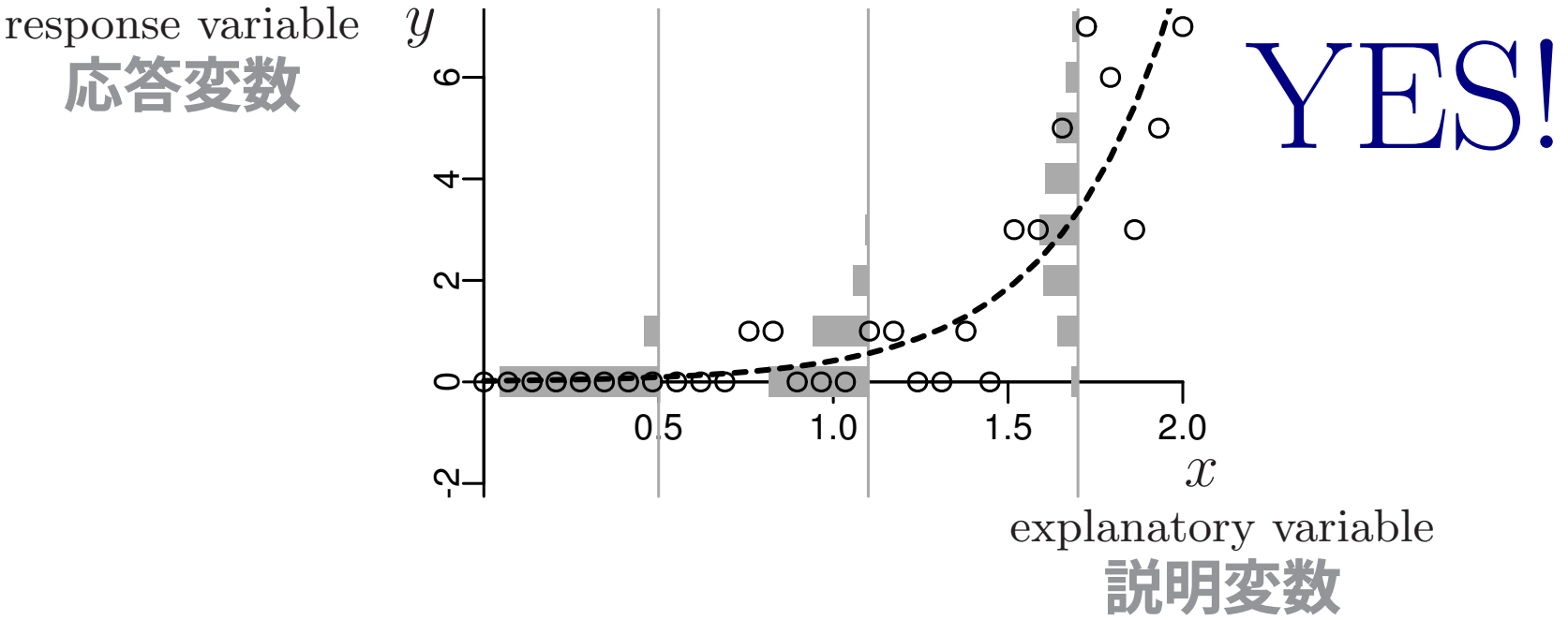
- タテ軸のばらつきは「正規分布」なのか?
- y の値は 0 以上なのに ……
- 平均値がマイナス?

応答変数 y と 説明変数 x

the Poisson disribution approximates data

ポアソン分布を使った統計モデルなら良さそう?!

ポアソン分布・対数リンク関数の統計モデル



- タテ軸に対応する「ばらつき」
- 負の値にならない「平均値」
- 正規分布を使ってるモデルよりましだね

2. ポアソン回帰の例題: 架空植物の種子数データ

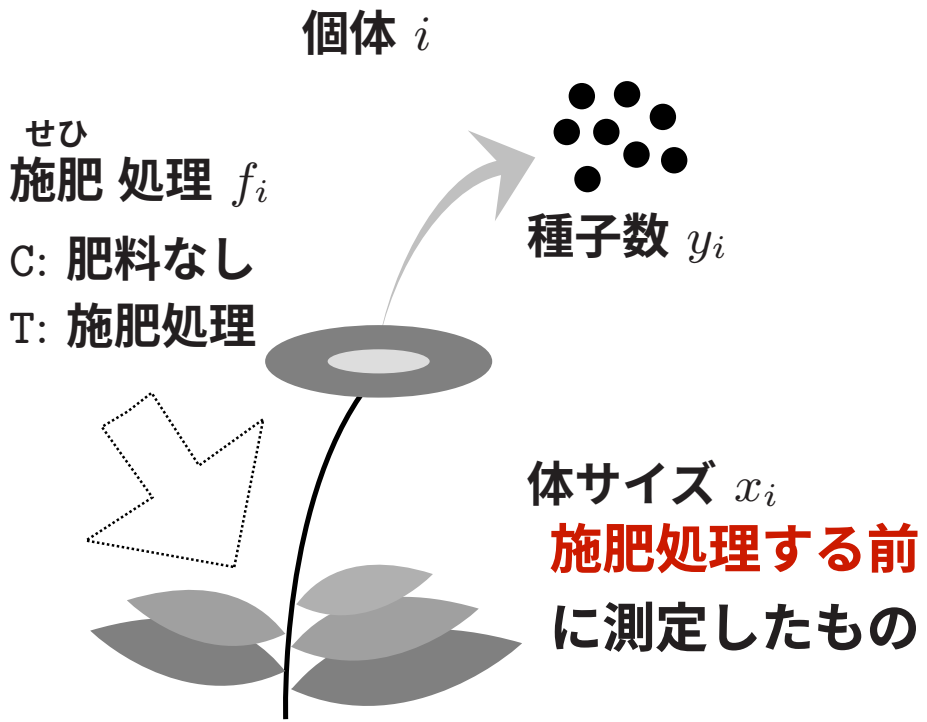
植物個体の属性，あるいは実験処理が種子数に影響?

まずはデータの概要を調べる

body size x and fertilization f change seed number y?

個体サイズと実験処理の効果を調べる例題

- response variable　seed number
  応答変数 : **種子数** $\{y_i\}$
- explanatory variable
  説明変数 :
  - body size
    体サイズ $\{x_i\}$
  - fertilization
    施肥処理 $\{f_i\}$



sample size
標本数

control
- **無処理** ($f_i = \mathtt{C}$): 50 sample ($i \in \{1, 2, \cdots 50\}$)

treated
- **施肥処理** ($f_i = \mathtt{T}$): 50 sample ($i \in \{51, 52, \cdots 100\}$)

Reading data file

データファイルを読みこむ

data3a.csv は CSV (comma separated value) format file なので，R で読みこむには以下のようにする:

```
> d <- read.csv("data3a.csv")
```

データは d と名付けられた data frame (表みたいなもの) に格納される

とりあえず data frame d を表示

```
> d
     y      x  f
1    6   8.31  C
2    6   9.44  C
3    6   9.50  C
... (中略) ...
99   7 10.86  T
100  9   9.97  T
```

data frame d を調べる: 連続値と整数値

```
> d$x
  [1]  8.31  9.44  9.50  9.07 10.16  8.32 10.61 10.06
  [9]  9.93 10.43 10.36 10.15 10.92  8.85  9.42 11.11
... (中略) ...
 [97]  8.52 10.24 10.86  9.97

> d$y
  [1]  6  6  6 12 10  4  9  9  9 11  6 10  6 10 11  8
 [17]  3  8  5  5  4 11  5 10  6  6  7  9  3 10  2  9
... (中略) ...
 [97]  6  8  7  9
```

data frame d を調べる: “因子型” のデータ

施肥処理の有無をあらわす f 列はちょっと様子がちがう

```
> d$f
  [1] C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C
 [26] C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C
 [51] T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T
 [76] T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T
Levels: C T
```

data type: factor

因子型データ: **いくつかの** levels **水準 をもつデータ**

ここでは C **と** T **の** 2 levels **水準**

data type and class

Rのデータのクラスとタイプ

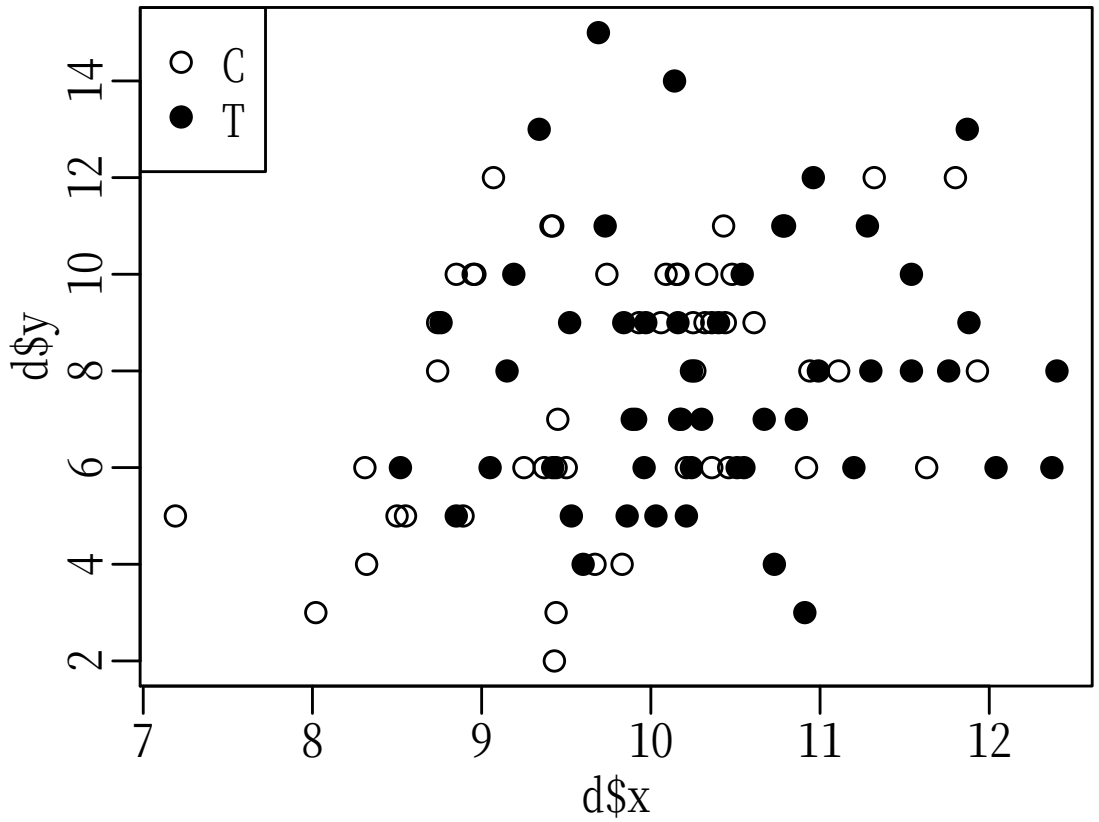
```
> class(d) # d は data.frame クラス
[1] "data.frame"
> class(d$y) # y 列は整数だけの integer クラス
[1] "integer"
> class(d$x) # x 列は実数も含むので numeric クラス
[1] "numeric"
> class(d$f) # そして f 列は factor クラス
[1] "factor"
```

data frame の summary()

```
> summary(d)
       y                x               f
 Min.   : 2.00   Min.   : 7.190   C:50
 1st Qu.: 6.00   1st Qu.: 9.428   T:50
 Median : 8.00   Median :10.155
 Mean   : 7.83   Mean   :10.089
 3rd Qu.:10.00   3rd Qu.:10.685
 Max.   :15.00   Max.   :12.400
```

データはとにかく図示する!

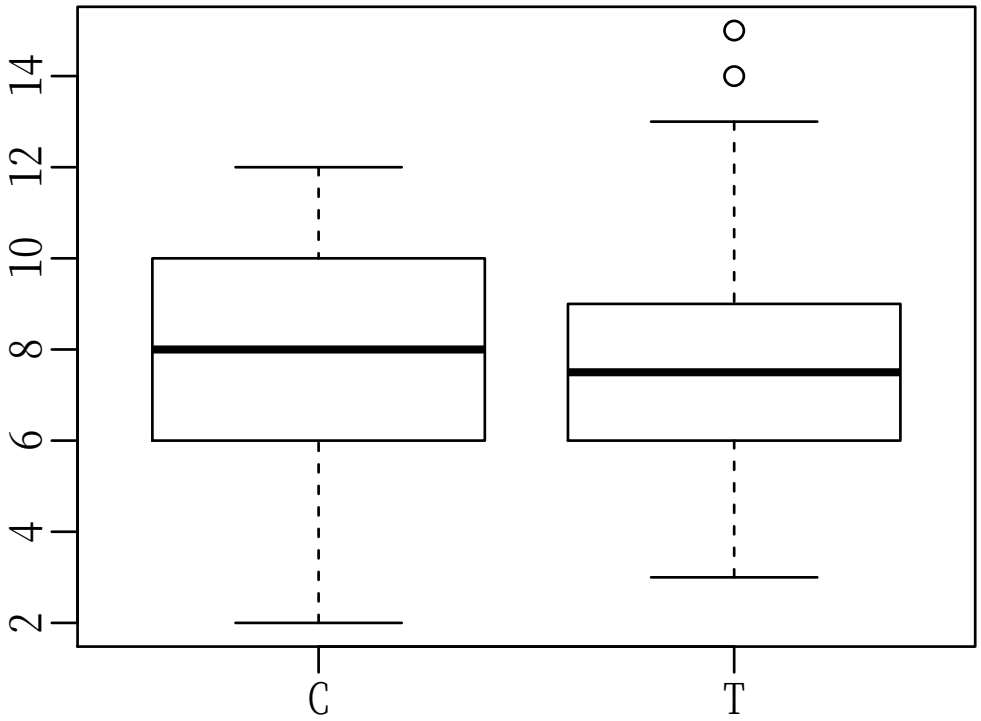
```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f])
> legend("topleft", legend = c("C", "T"), pch = c(21, 19))
```



散布図

施肥処理 f を横軸とした図

```
> plot(d$f, d$y)
```



箱ひげ図

how to specify GLM

3. GLM の詳細を指定する

probability distribution, linear predictor and link function

確率分布・線形予測子・リンク関数

ポアソン回帰では log link **関数を使うのが便利**

how to specify GLM

一般化線形モデルを作る

Generalized Linear Model

一般化線形モデル (GLM)

probability distribution

- 確率分布は?

linear predictor

- 線形予測子は?

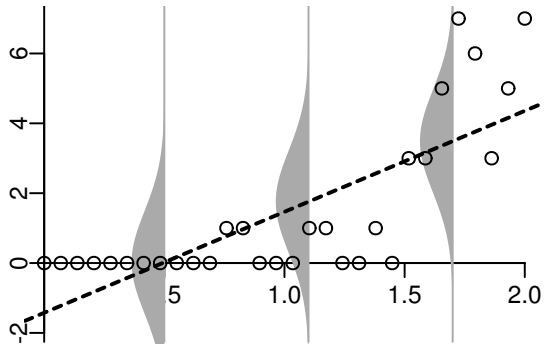
link function

- リンク関数は?

how to specify linear regression model, a GLM

GLM のひとつである直線回帰モデルを指定する

直線回帰のモデル



probability distribution　Gaussian distribution

- 確率分布 : 正規分布
- 線形予測子: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$

直線の式: (切片) + (傾き) $\times x_i$

link function　identity link function

- リンク関数: 恒等リンク関数

結果 ← 原因 (かも?) を表現する線形モデル

- **結果**: **応答変数**
- **原因**: **説明変数**
- **線形予測子** (linear predictor):

$$\begin{aligned}\textbf{(応答変数の平均)} = \ & \textbf{定数 (切片)} \\ & + \ (\textbf{係数 } 1) \times (\textbf{説明変数 } 1) \\ & + \ (\textbf{係数 } 2) \times (\textbf{説明変数 } 2) \\ & + \ (\textbf{係数 } 3) \times (\textbf{説明変数 } 3) \\ & + \ \cdots\end{aligned}$$

how to specify Poisson regression model, a GLM

GLM のひとつであるポアソン回帰モデルを指定する

ポアソン回帰のモデル

probability distribution　Poisson distribution

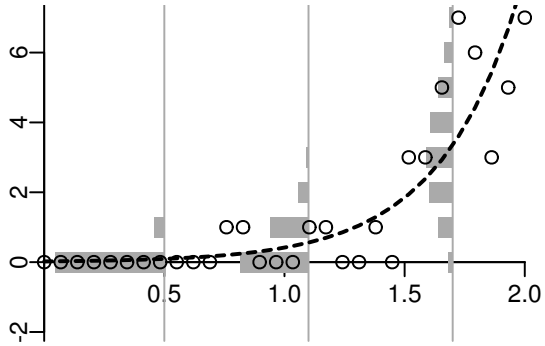
- 確率分布 : ポアソン分布

linear predictor

- 線形予測子: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$

link function　log link function

- リンク関数: 対数リンク関数



how to specify logistic regression model, a GLM

GLM のひとつである logistic 回帰モデルを指定する

ロジスティック回帰のモデル

probability distribution　binomial distribution

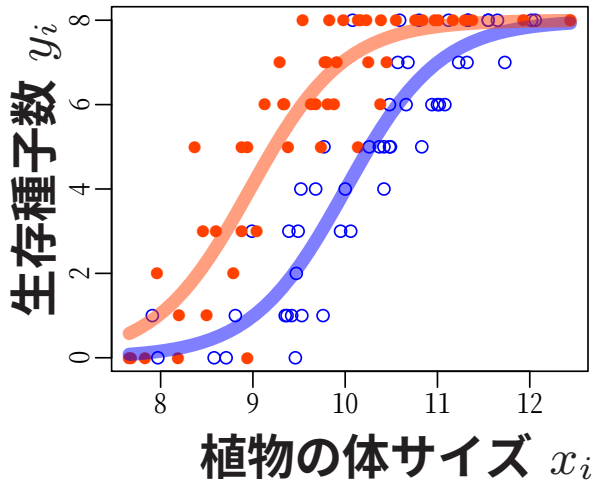
- **確率分布** : **二項分布**

linear predictor

- **線形予測子**: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$

link function

- **リンク関数**: logit **リンク関数**

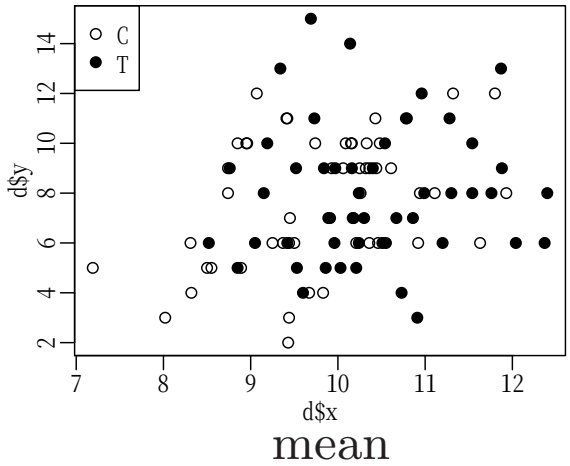


R で一般化線形モデル (GLM) の推定を……

	probability distribution 確率分布	random number generation 乱数発生	GLM fitting GLM あてはめ
(離散)	ベルヌーイ分布	`rbinom()`	`glm(family = binomial)`
	二項分布	`rbinom()`	`glm(family = binomial)`
	ポアソン分布	`rpois()`	`glm(family = poisson)`
	負の二項分布	`rnbinom()`	`glm.nb()` in `library(MASS)`
(連続)	ガンマ分布	`rgamma()`	`glm(family = gamma)`
	正規分布	`rnorm()`	`glm(family = gaussian)`

- `glm()` で使える確率分布は上記以外もある
- GLM は直線回帰・重回帰・分散分析・ポアソン回帰・ロジスティック回帰その他の「よせあつめ」と考えてもよいかも

さてさて，種子数の例題にもどって



seed number y_i follows the Poisson distribution

種子数 y_i は平均 λ_i のポアソン分布にしたがう としましょう

$$p(y_i \mid \lambda_i) = \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!}$$

個体 i の 平均 λ_i を以下のようにおいてみたらどうだろう……?

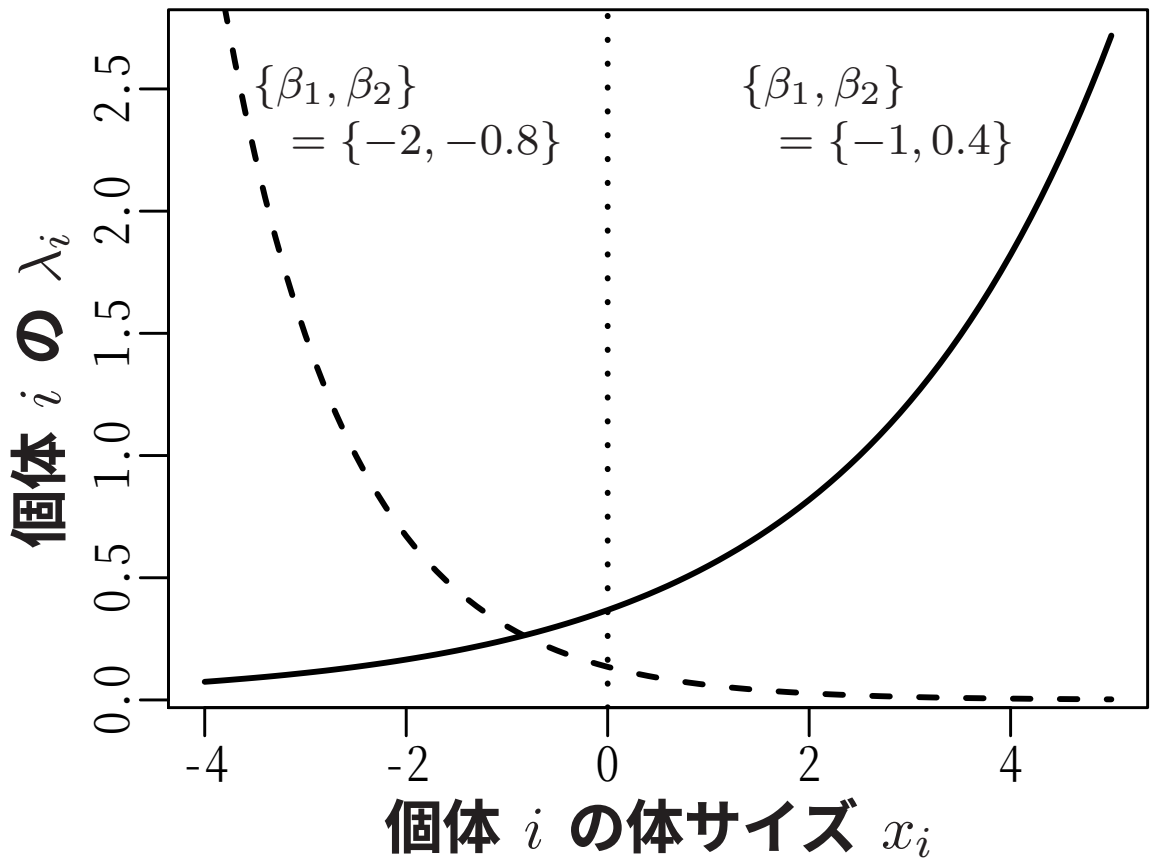
$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

- β_1 と β_2 は　係数　(パラメーター)
  (coefficient, parameter)
- x_i は個体 i の 体サイズ，f_i はとりあえず無視
  (body size; no f_i, for simplicity)

exponential function

指数関数ってなんだっけ?

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$



GLM のリンク関数と線形予測子 ← (直線の式)

個体 i の平均 $\overset{\text{mean}}{\lambda_i}$

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

$$\Updownarrow$$

$$\overset{\text{log link function}}{\log(\lambda_i)} = \overset{\text{linear predictor}}{\beta_1 + \beta_2 x_i}$$

$$\overset{\text{log link function}}{\log(\textbf{平均})} = \overset{\text{linear predictor}}{\textbf{線形予測子}}$$

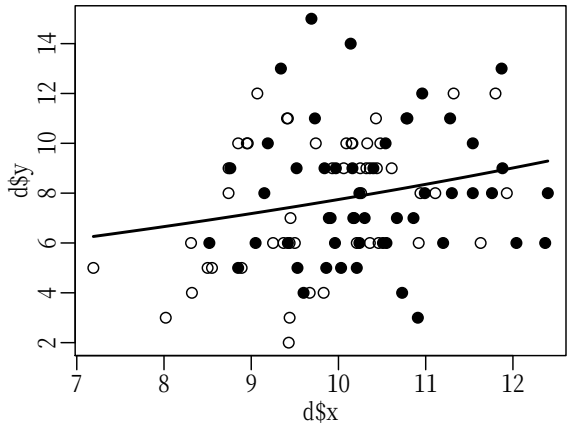
log リンク関数とよばれる理由は，上のようになっているから

a statistical model for this example

この例題のための統計モデル

ポアソン回帰のモデル

- 確率分布 (probability distribution) : ポアソン分布 (Poisson distribution)
- 線形予測子 (linear predictor): $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- リンク関数 (link function): 対数リンク関数 (log link function)



4. R で GLM のパラメーターを推定

あてはまりの良さは対数尤度関数で評価

推定計算はコンピューターにおまかせ

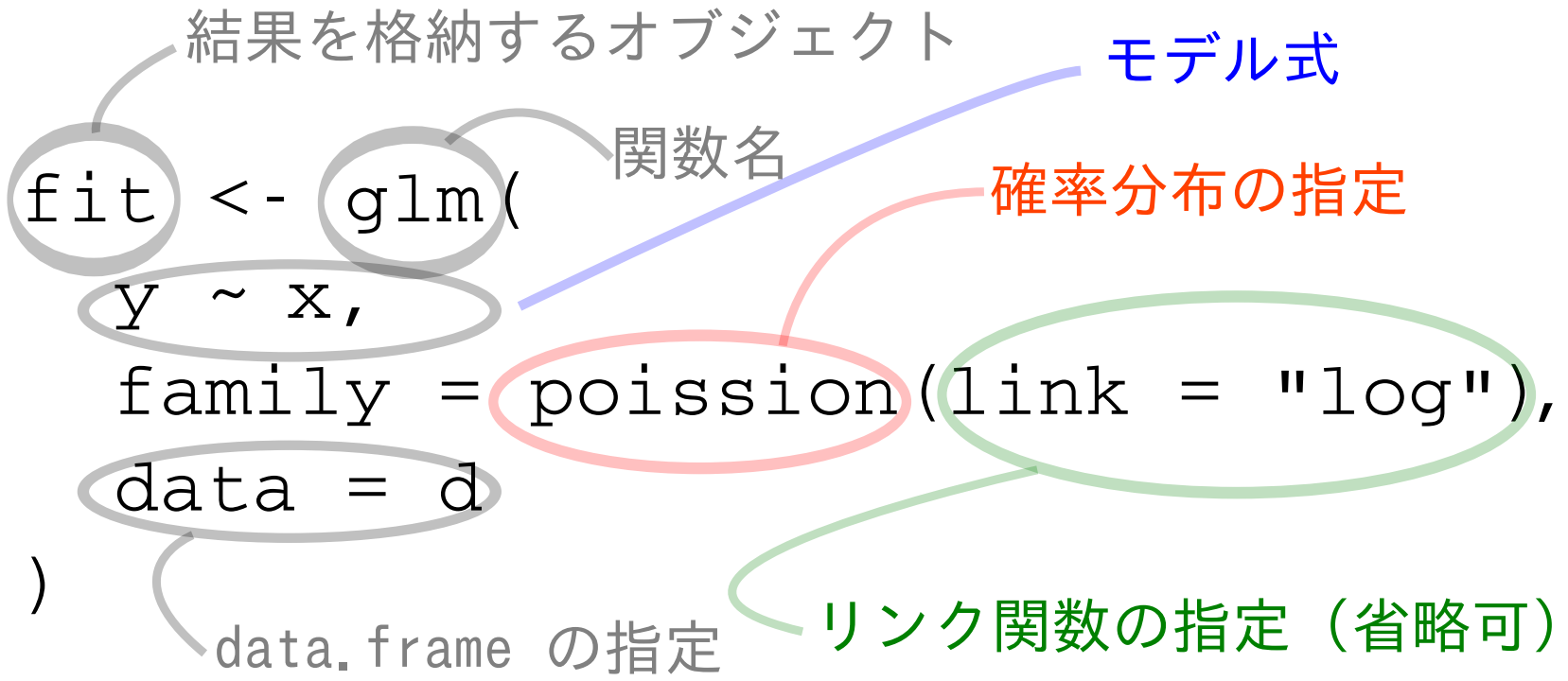
glm() function 関数 の指定

```
> d
    y     x  f
1   6  8.31  C
2   6  9.44  C
3   6  9.50  C
... (中略) ...
99  7 10.86  T
100 9  9.97  T
```

Is that all?
これだけ!

```
> fit <- glm(y ~ x, data = d, family = poisson)
```

glm() 関数の指定の意味



- **モデル式 (線形予測子 z): どの説明変数を使うか?**
- `link` **関数**: z **と応答変数** (y) **平均値 の関係は?**
- `family`: **どの確率分布を使うか?**

glm() 関数の output 出力

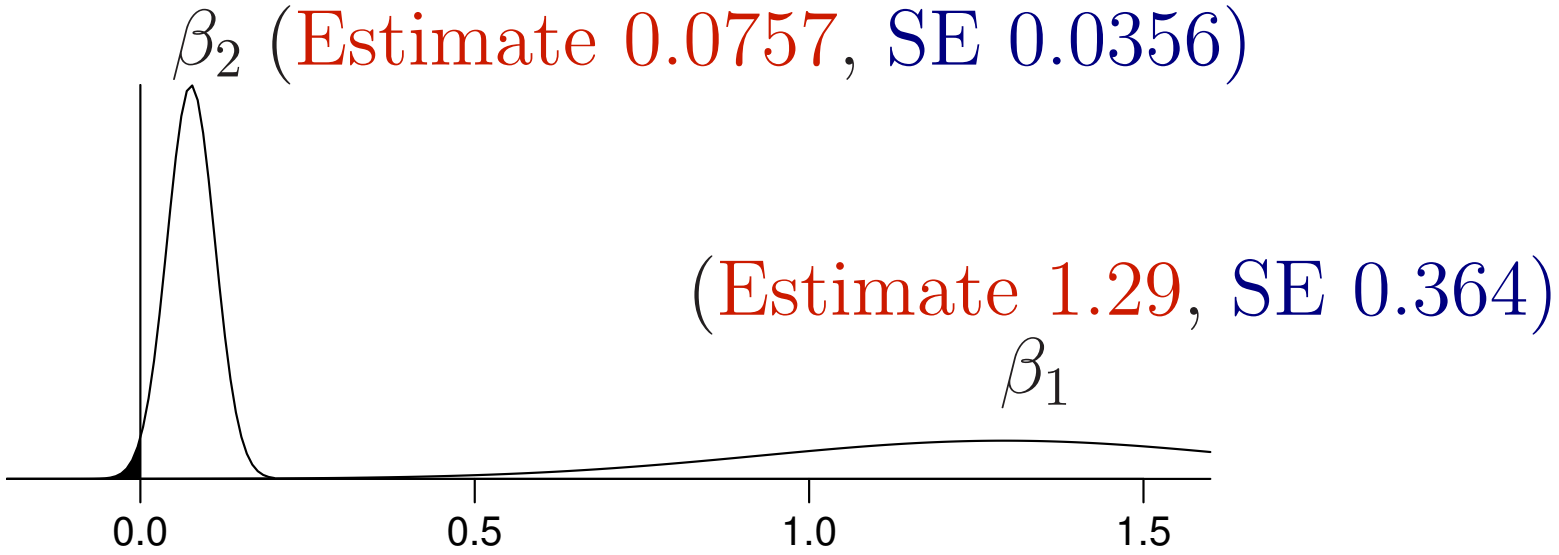
```
> fit <- glm(y ~ x, data = d, family = poisson)

all:  glm(formula = y ~ x, family = poisson, data = d)

Coefficients:
(Intercept)            x
     1.2917       0.0757

Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null);  98 Residual
Null Deviance:^^I    89.5
Residual Deviance: 85 ^^IAIC: 475
```

glm() 関数のくわしい出力

```
> summary(fit)
Call:
glm(formula = y ~ x, family = poisson, data = d)

Deviance Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.368  -0.735  -0.177   0.699   2.376

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   1.2917     0.3637    3.55  0.00038
x             0.0757     0.0356    2.13  0.03358
```

……（以下，省略）……

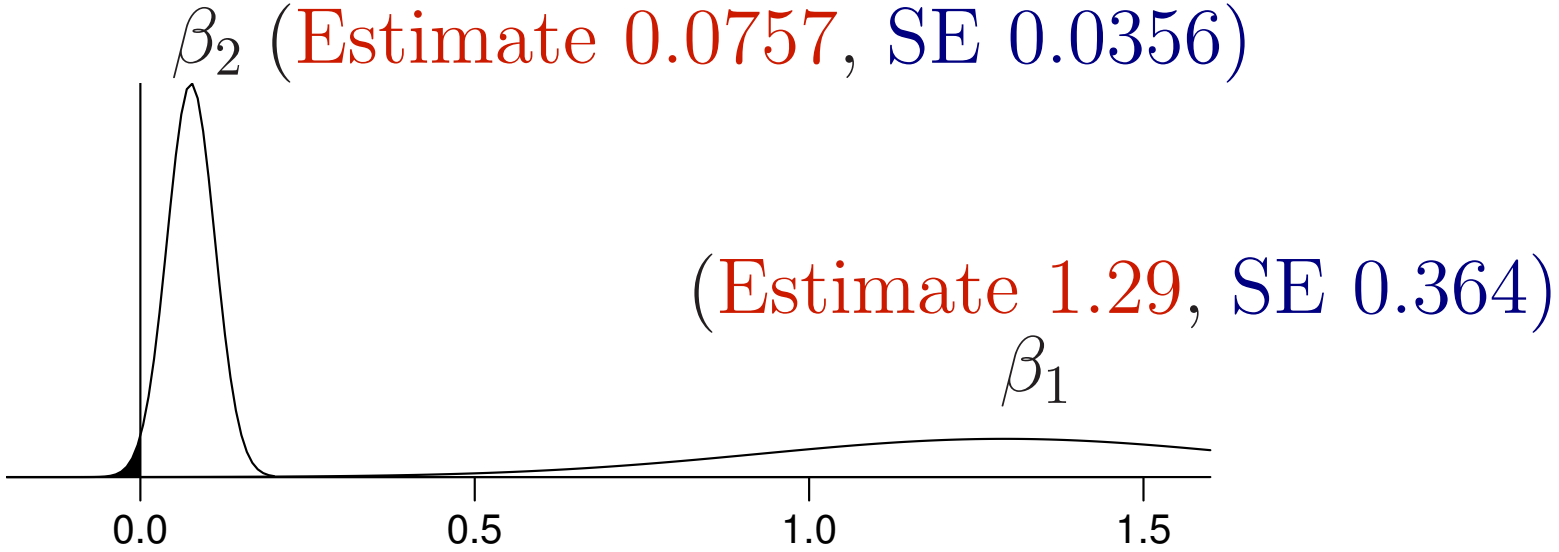
推定値と標準誤差のいめーじ (かなりいいかげんな説明)



- 確率 p は **ゼロからの距離** をあらわしている
- p がゼロに近いほど **推定値** $\hat{\beta}$ はゼロから離れている
- p が 0.5 に近いほど **推定値** $\hat{\beta}$ はゼロに近い

(注: 頻度主義的な信頼区間の正しい解釈はもっとめんどくさい)

推定値と標準誤差のいめーじ (何がめんどくさいの?)



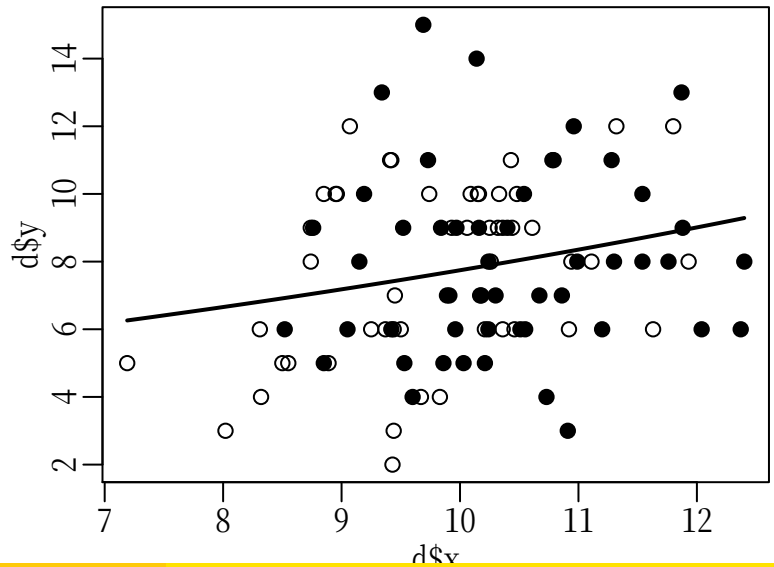
- 区間 95% 内に「ゼロ」があるとしよう → 「だから何？」
- 多数のパラメーターがある場合には?
- 授業の後半であつかうベイズ統計モデルでの解釈は **簡単** ……になるはず……

model prediction
モデルの予測

```
> fit <- glm(y ~ x, data = d, family = poisson)
...
Coefficients:
(Intercept)            x
     1.2917       0.0757
```

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f]) # data
> xp <- seq(min(d$x), max(d$x), length = 100)
> lines(xp, exp(1.2917 + 0.0757 * xp))
```

the figure shows the relationship
ここでは観測データと予測の関係
between model prediction and data
を見ているだけ，なのだが



5. 処理をした・しなかった 効果も統計モデルに入れる

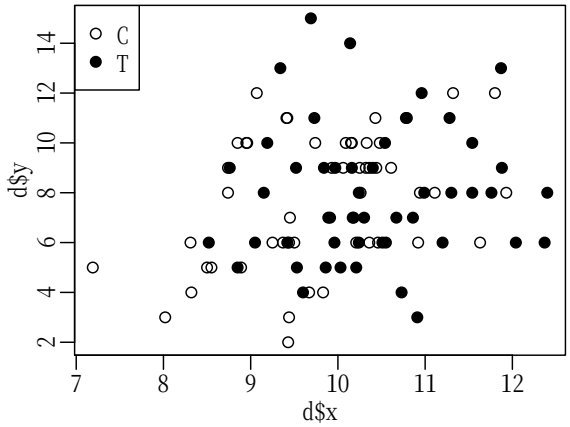
factor type

GLM の 因子型説明変数

数量型 + 因子型 という組み合わせで

Add fertilization effects

肥料の効果 f_i もいれましょう



mean

seed number y_i follows the Poisson distribution

種子数 y_i は平均 λ_i のポアソン分布にしたがう としましょう

$$p(y_i \mid \lambda_i) = \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!}$$

個体 i の 平均 λ_i を次のようにする

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i)$$

fertilization effects　coefficient

- β_3 **は 施肥処理の効果 の 係数**

dummy variable

- f_i **の ダミー変数**

$$d_i = \begin{cases} 0 & (f_i = \texttt{C} \text{ の場合}) \\ 1 & (f_i = \texttt{T} \text{ の場合}) \end{cases}$$

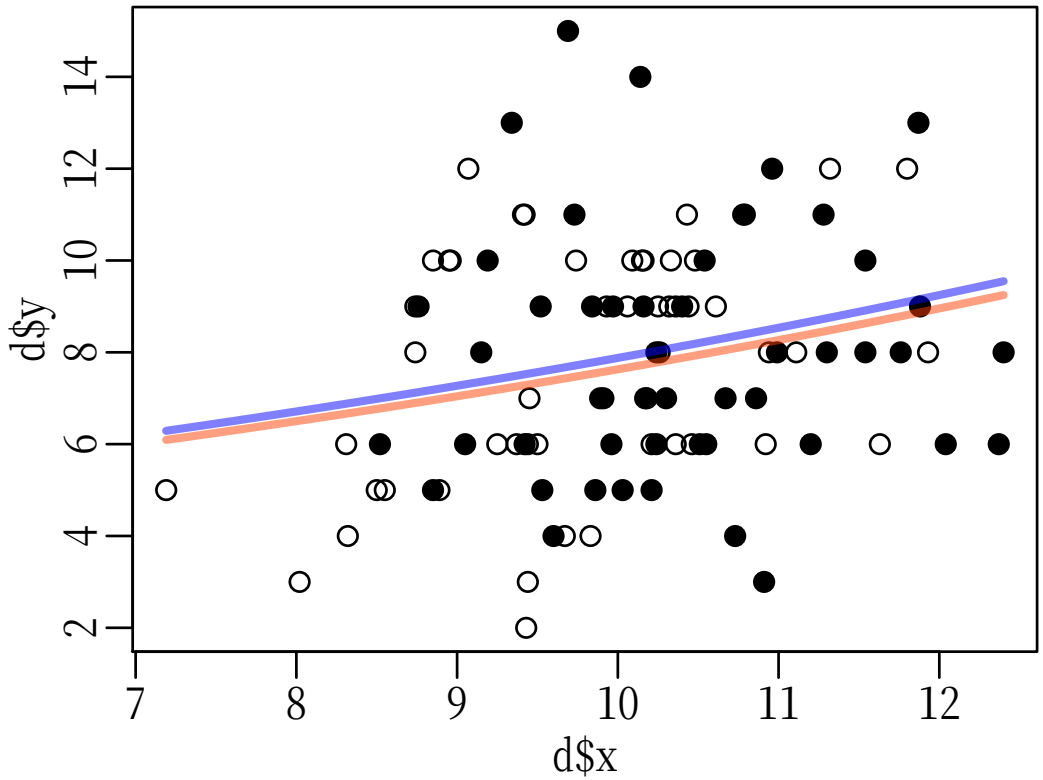
glm(y ~ x + f, ...) の output 出力

```
> summary(glm(y ~ x + f, data = d, family = poisson))
...(略)...

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   1.2631     0.3696    3.42  0.00063
x             0.0801     0.0370    2.16  0.03062
fT           -0.0320     0.0744   -0.43  0.66703

…… (以下，省略) ……
```

model prediction

x + f モデルの予測

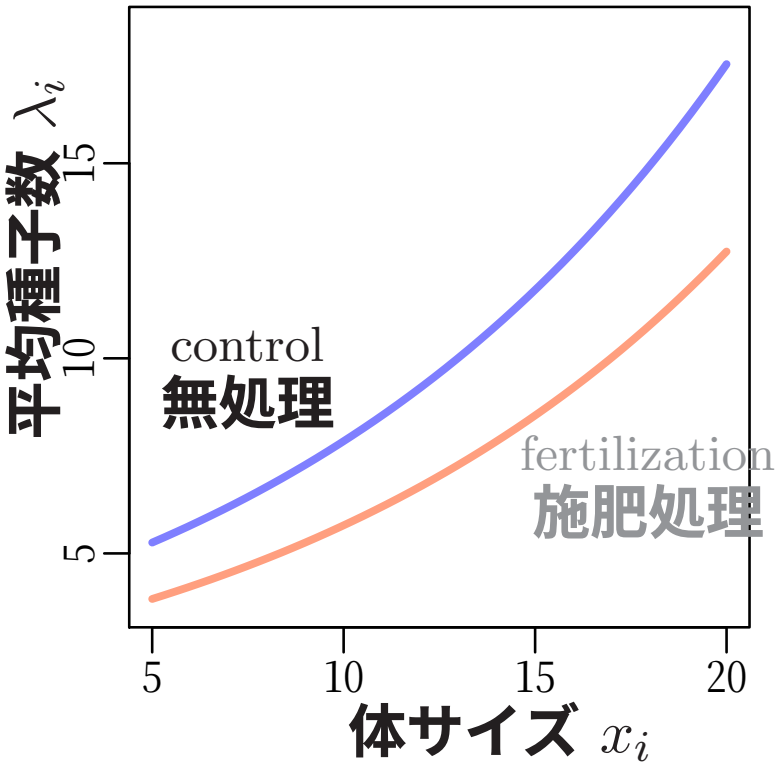
```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f]) # data
> xp <- seq(min(d$x), max(d$x), length = 100)
> lines(xp, exp(1.2631 + 0.0801 * xp), col = "blue", lwd = 3) # C
> lines(xp, exp(1.2631 + 0.0801 * xp - 0.032), col = "red", lwd = 3) # T
```



multiple explanatory variables

複数の説明変数をいれた場合の統計モデル

- $f_i = \mathtt{C}$: $\lambda_i = \exp(1.26 + 0.0801 x_i)$
- $f_i = \mathtt{T}$: $\lambda_i = \exp(1.26 + 0.0801 x_i - 0.032)$
  $= \exp(1.26 + 0.0801 x_i) \times \exp(-0.032)$



施肥効果である $\exp(-0.032)$ は かけ算できくことに注意!

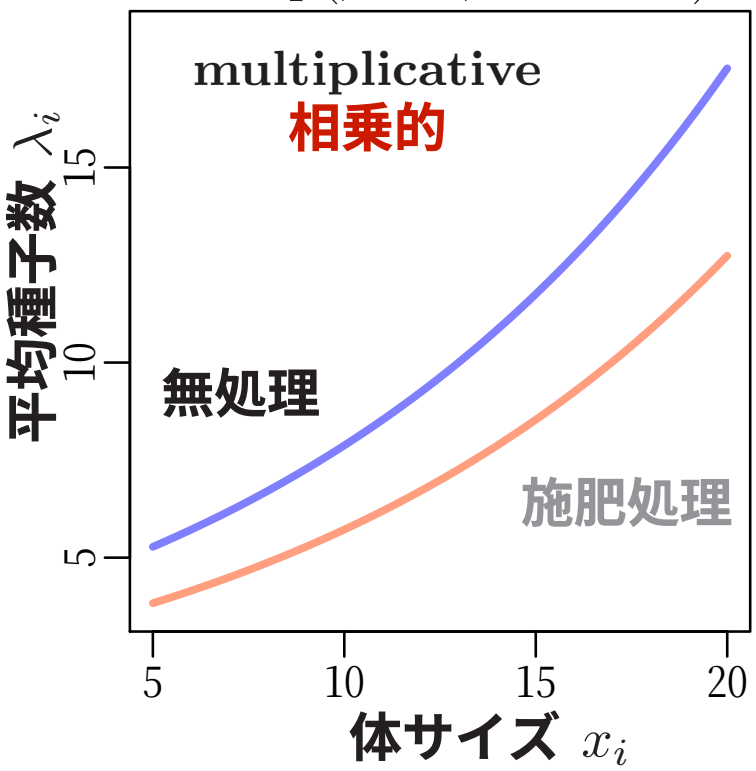
model interpretation depends on link function

リンク関数が違うとモデルの解釈が異なる

log link function

(A) 対数リンク関数

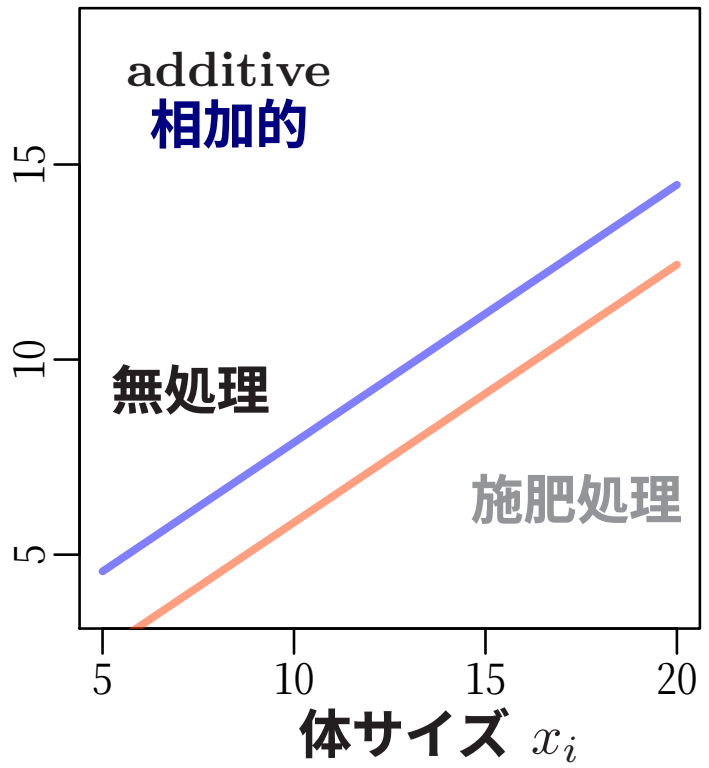
$\lambda = \exp(\beta_1 + \beta_2 x + \cdots)$



identity link function

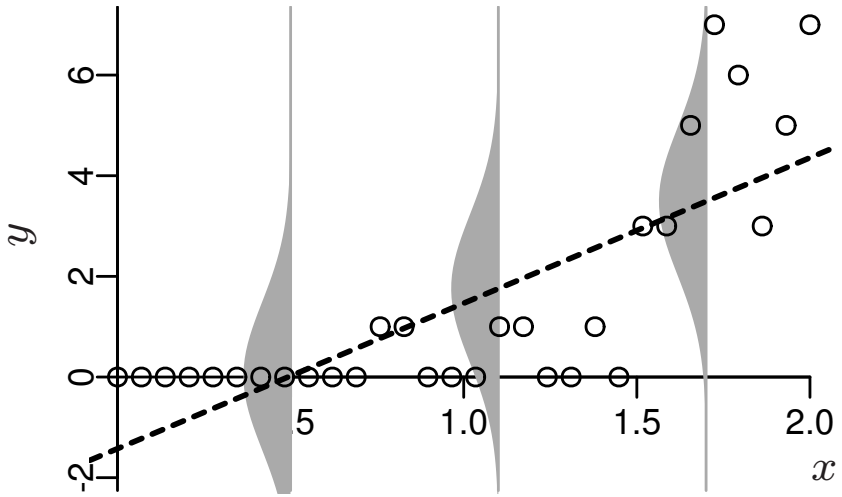
(B) 恒等リンク関数

$\lambda = \beta_1 + \beta_2 x + \cdots$

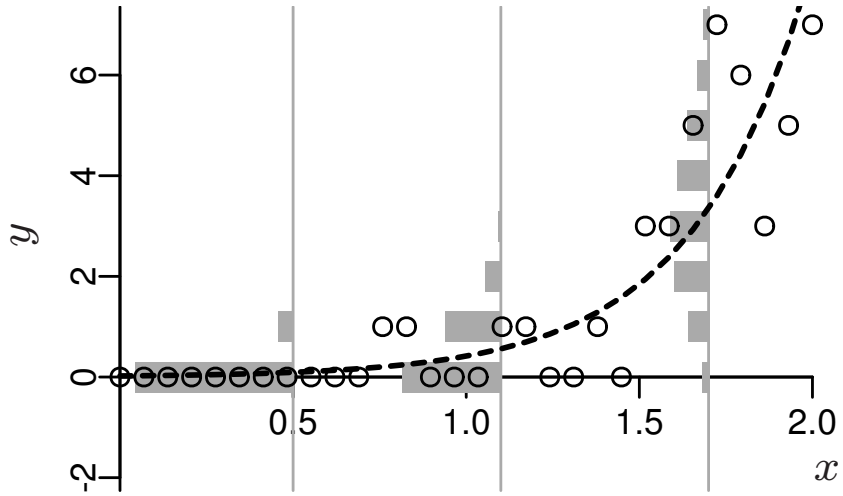


GLM: 適切な probability distribution 確率分布 と link function リンク関数 を選ぶ

正規分布・恒等リンク関数の統計モデル

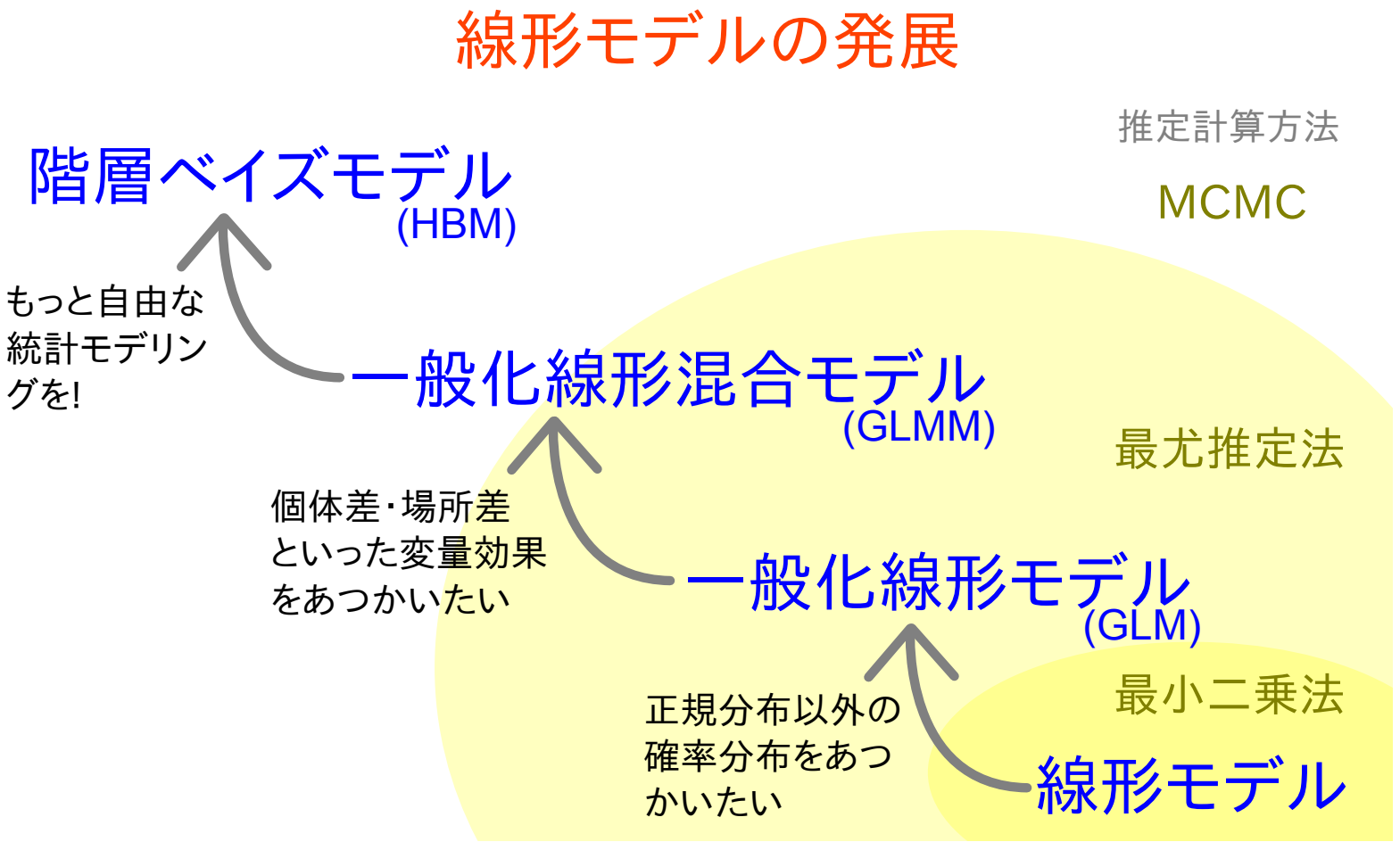


ポアソン分布・log リンク関数の統計モデル



statistaical models appeared in the class

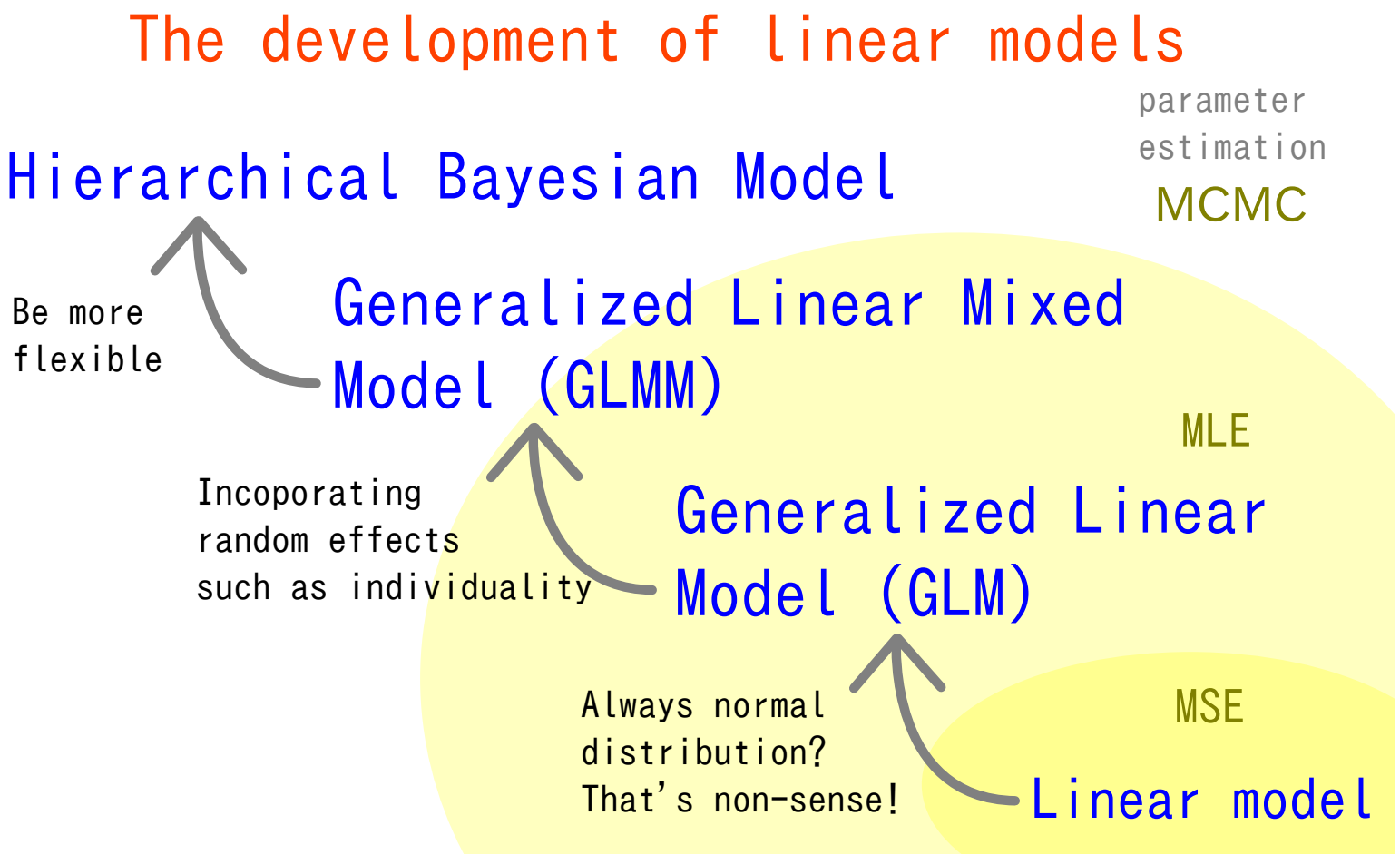
この講義であつかう統計モデルたち



データの特徴にあわせて線形モデルを改良・発展させる

statistaical models appeared in the class

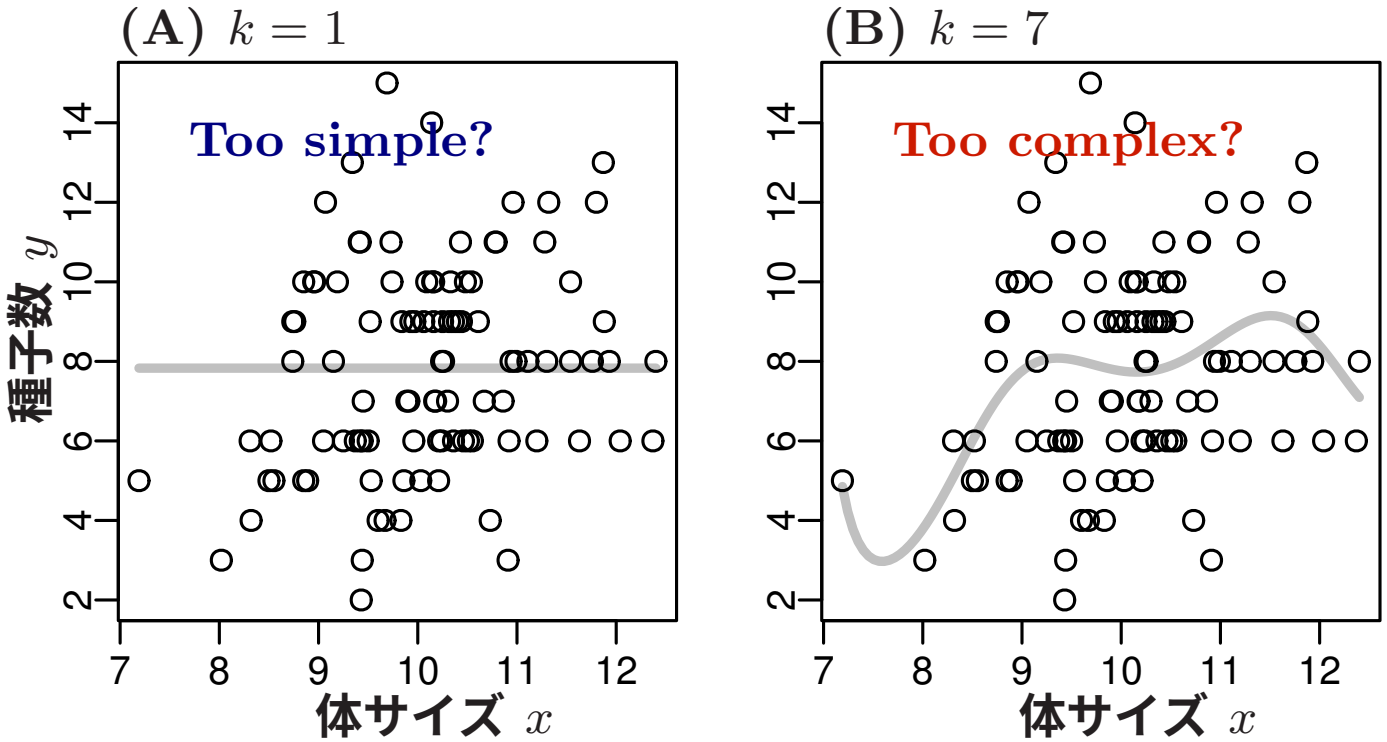
この授業であつかう統計モデルたち



Kubo Doctrine: "Learn the evolution of linear-model family, firstly!"

次回予告

The next topic



モデル選択と統計学的検定

Model selection and statistical test