統計モデリング入門 新潟大 2015 (7a)
階層ベイズモデルの応用: 場所差と時系列

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp, @KuboBook

新潟大学集中講義 http://goo.gl/m8HSBM

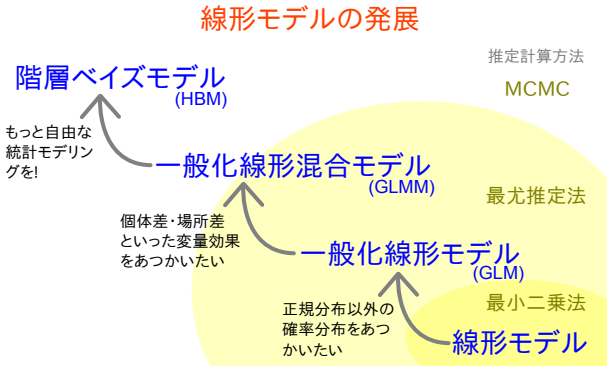
2015–05–27

ファイル更新時刻: 2015–05–21 13:43

この時間に説明したいこと

1. 個体差 + 場所差の階層ベイズモデル (ファイル 7a)
2. 空間構造のある階層ベイズモデル (ファイル 7a)
3. 時間構造のある階層ベイズモデル (ファイル 7b)

“統計モデリング入門” に登場する統計モデル



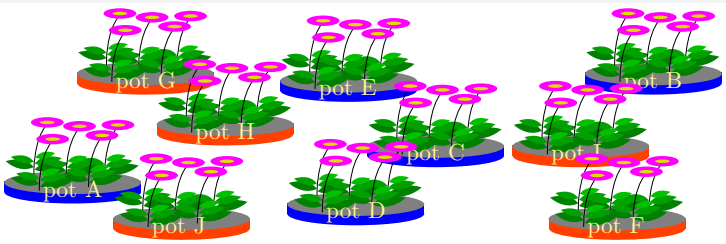
データの特徴にあわせて線形モデルを改良・発展させる

1. 複数ランダム効果の階層ベイズモデル

個体差 + グループ差, など

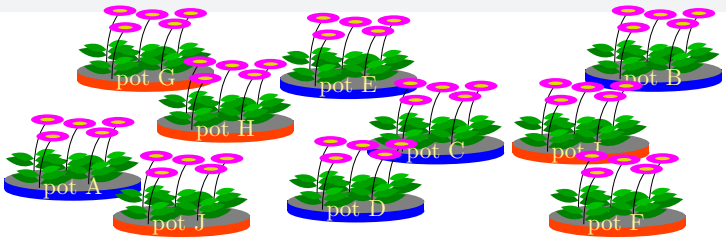
そして “てぬき” モデリングの危なさについて

架空植物の例題: またまた種子数データ



- 肥料をやったら個体ごとの種子数 y_i が増えるかどうかを調べたい
- 植木鉢 10 個, 各鉢に 10 個体の架空植物 (合計 100 個体)
  - コントロール ($f_j = \mathrm{C}$) 5 鉢 (合計 50 個体)
  - 肥料をやる処理 ($f_j = \mathrm{T}$) 5 鉢 (合計 50 個体)

このへんてこな例題, 言い換えると……?



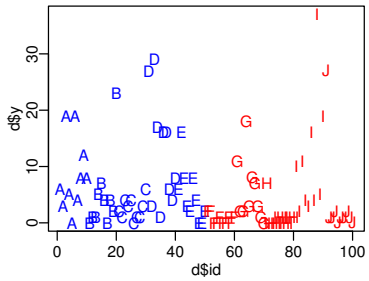
- ○○教育法をやったら児童ごとの算数の得点 y_i が増えるかどうかを調べたい
- 小学校 10 校, 各校に 10 人の児童に算数のテスト (合計 100 児童)
  - コントロール ($f_j = \mathrm{C}$) 5 校 (合計 50 児童)
  - ○○教育法実施 ($f_j = \mathrm{T}$) 5 校 (合計 50 児童)

データはこのように格納されている

```
> d <- read.csv("d1.csv")
> head(d)
  id pot f  y
1  1   A C  6
2  2   A C  3
3  3   A C 19
4  4   A C  5
5  5   A C  0
6  6   A C 19
```

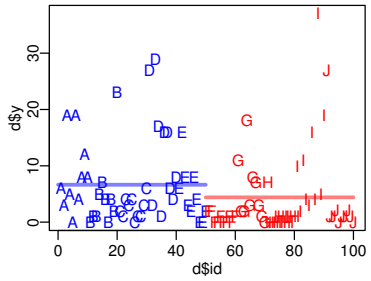
- id 列: 個体番号 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$
- pot 列: 植木鉢名 {A, B, C, $\cdots$, J}
- f 列: 処理: コントロール C, 肥料 T
- y 列: 種子数 (応答変数)

データはとにかく図示する!!



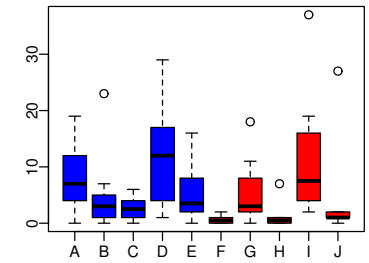
- plot(did, dy, pch = as.character(d$pot), ...)
- コントロール・処理 でそんなに差がない?

処理ごとの平均も図に追加してみる



- むしろ 処理 のほうが平均種子数が低い?
- (注) この架空データは 肥料の効果はゼロ と設定して生成した

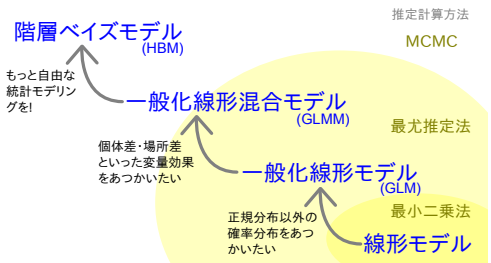
個体差だけでなく植木鉢差もありそう?



- plot(dpot, dy, col = rep(c("blue", "red"), each = 5))
- 植木鉢由来の random effects みたいなものはブロック差と呼ばれる

(一般化な) 線形モデルのわくぐみで，とりあえず考えてみる

線形モデルの発展



GLM: 個体差もブロック差も無視

```
> summary(glm(y ~ f, data = d, family = poisson))
...(略)...
Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   1.8931     0.0549   34.49  < 2e-16
fT           -0.4115     0.0869   -4.73  2.2e-06
...(略)...
```

- 肥料をやる処理 (f) をすると，平均種子数が下がる?
- AIC でモデル選択しても同じような結果に

GLMM: 個体差だけ考慮，ブロック差は無視

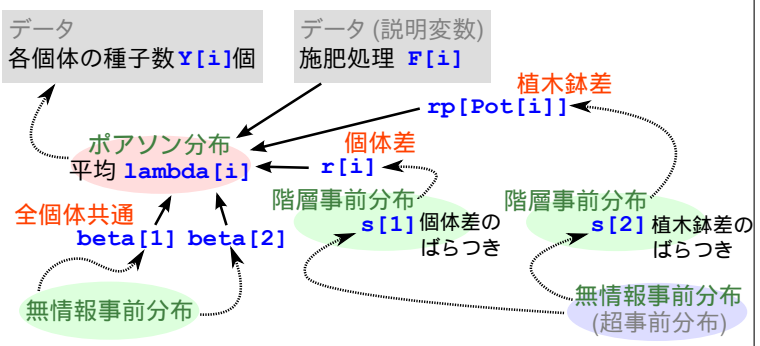
```
> library(glmmML)
> summary(glmmML(y ~ f, data = d, family = poisson,
+ cluster = id))
...(略)...
             coef se(coef)     z Pr(>|z|)
(Intercept)  1.351    0.192  7.05  1.8e-12
fT          -0.737    0.280 -2.63  8.4e-03
...(略)...
```

- やっぱり同じ?
- むしろ肥料処理の悪影響が強い?

個体差 + ブロック差を考える階層ベイズモデル

- ここでは log リンク関数を使う
- 平均の対数 $\log(\lambda_i) = a + bf_i +$ (個体差) + (ブロック差)
- 事前分布の設定
  - 切片 a と f_i の係数 b は無情報事前分布 (すごく平らな正規分布)
  - 個体差とブロック差は階層的な事前分布 (それぞれ標準偏差 σ_1, σ_2 の正規分布，平均はゼロ)
  - 標準偏差 σ_* は無情報事前分布 ($[0, 10^4]$ の一様分布)

植木鉢問題の階層ベイズモデルの図示



個体差 + ブロック差を考える階層ベイズモデル

- ここでは log リンク関数を使う
- 平均の対数 $\log(\lambda_i) = a + bf_i +$ (個体差) + (ブロック差)
- 事前分布の設定
  - 切片 a と f_i の係数 b は無情報事前分布 (すごく平らな正規分布)
  - 個体差とブロック差は階層的な事前分布 (それぞれ標準偏差 σ_1, σ_2 の正規分布，平均はゼロ)
  - 標準偏差 σ_* は無情報事前分布 ($[0, 10^4]$ の一様分布)

個体差 + ブロック差のあるポアソン回帰の BUGS code (1)

```
model
{
  for (i in 1:N.sample) {
    Y[i] ~ dpois(lambda[i])
    log(lambda[i]) <- a + b * F[i] + r[i] + rp[Pot[i]]
  }
  # 次のページの事前分布の定義につづく
```

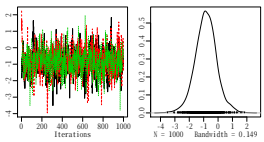
ここでの BUGS coding のポイント

- 因子型の説明変数 $f_i \in \{\mathtt{C}, \mathtt{T}\}$ は，それぞれ `F[i]` を `0`, `1` と置きかえる
- `Pot[i]` は `1`, `2`, ..., `10` と数字になおした植木鉢名をいれておいて，植木鉢の効果 `rp[...]` を参照させる

個体差 + ブロック差のあるポアソン回帰の BUGS code (2)

```
  # 前のページからのつづき
  a ~ dnorm(0, 1.0E-4) # 切片
  b ~ dnorm(0, 1.0E-4) # 肥料の効果
  for (i in 1:N.sample) {
    r[i] ~ dnorm(0, tau[1])  # 個体差
  }
  for (j in 1:N.pot) {
    rp[j] ~ dnorm(0, tau[2]) # 植木鉢の差 (ブロック差)
  }
  for (k in 1:N.tau) {
    tau[k] <- 1.0 / (sigma[k] * sigma[k]) # 個体・植木鉢のばらつき
    sigma[k] ~ dunif(0, 1.0E+4)
  }
}
```

肥料の効果（パラメーター b）はなさそう?

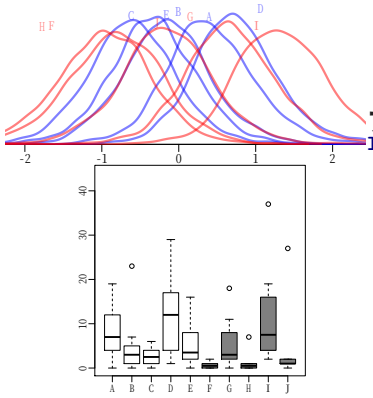


	mean	sd	2.5%	25%	50%	75%	97.5%	Rh
a	1.501	0.529	0.482	1.157	1.493	1.852	2.565	1.0
b	-1.016	0.706	-2.436	-1.476	-0.993	-0.565	0.395	1.0
sigma[1]	1.020	0.114	0.822	0.939	1.014	1.089	1.265	1.0

...(略)...

この架空データを生成した種子数シミュレイションでは，肥料の効果はまったく無いと設定していた

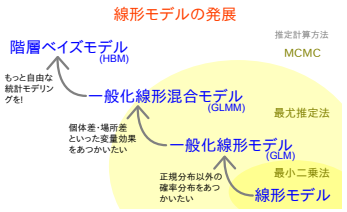
推定された植木鉢の差（ブロック差）



統計モデリングの手ぬきは危険!

- random effects つまり 個体差・ブロック差が大きい
- random effects の影響が大きいときには，fixed effects の大きさが見えにくくなる— ニセの「効果」が見えることもあれば，見えるはずの傾向が隠されることも
  - 個体差・ブロック差の階層ベイズモデルが必要!
- もしブロック差を人為的に小さくできないなら，ブロック数をもっと増やして，より正確な植木鉢の効果のばらつきを正確に推定するしかない

階層ベイズモデルと GLMM の関係は?



一般化線形混合モデル (Generalized Linear Mixed Model) **は階層ベイズモデルのひとつ**

- GLMM では個体差・植木鉢差といった local parameter は積分して消去してしまう
- 階層ベイズモデルでは，何もかも事後分布として推定してしまう

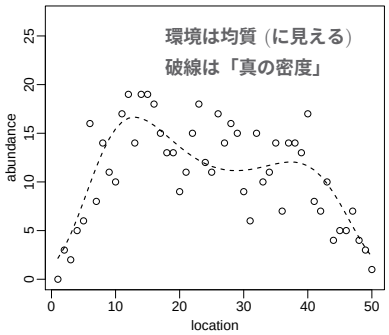
2. 複数ランダム効果の階層ベイズモデル

個体差 + グループ差，など

そして “てぬき” モデリングの危なさについて

架空の例題: 個体数データ，一次元空間データ

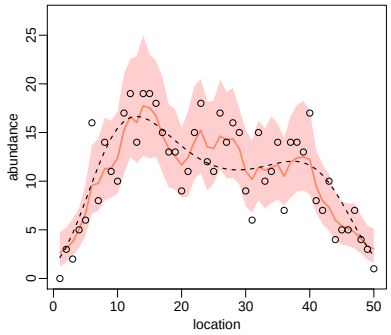
欠測データなし



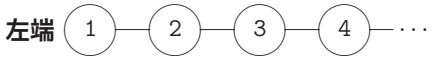
問: 空間自己相関を考慮して生物個体の密度推定

解析の目的: まずはこんな推定をしてみたい

空間相関を考慮するモデル
欠測データなし

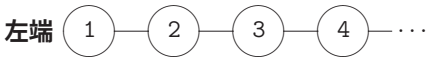


空間相関のある「場所差」階層ベイズモデル



- 地点 i の観測個体数は平均 λ_i のポアソン分布にしたがう: $y_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_i)$
- 平均 λ_i の対数は (全体の平均) + (場所差) と分割する: $\log \lambda_i = \beta + r_i$
- ベイズモデルとしてあつかいたいので，推定したいパラメーターの事前分布 を決めてやらなければならない
  - 事前分布 についてはあとで説明
- 全体の平均 β は無情報事前分布にしたがう: $\beta \sim \mathrm{Normal}(0, 10^2)$,

空間相関のある「場所差」階層ベイズモデル (続)



- Conditional Autoregressive (CAR) モデルにおける場所差 r_i の条件つき事前分布 (N_i は i の近傍場所数, $\mathbf{J}_i$ は i の近傍場所):

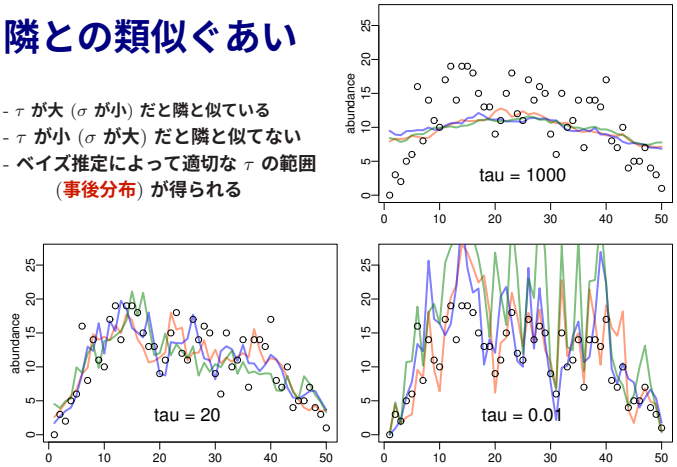
$$r_i \sim \mathrm{Normal}(\frac{\sum_{j \in \mathbf{J}_i} r_j}{N_i}, \frac{\sigma}{N_i})$$

- σ は無情報事前分布にしたがう: $\tau = 1/\sigma^2 \sim \mathrm{Gamma}(1.0^{-2}, 1.0^{-2})$
- ベイズの定理 → 事後分布の導出

$$p(\beta, \{r_i\}, \tau \mid \mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y} \mid \beta, \{r_i\}, \tau) \times (\text{事前分布あれこれ})}{\int\int \cdots \int (\uparrow \text{分子}) d\beta dr_1 \cdots dr_{50} d\tau}$$

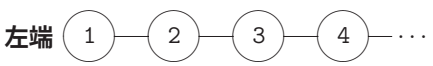
超パラメーター τ が決める 隣との類似ぐあい

- τ が大 (σ が小) だと隣と似ている
- τ が小 (σ が大) だと隣と似てない
- ベイズ推定によって適切な τ の範囲 (事後分布) が得られる



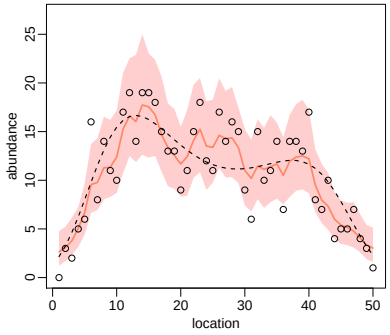
BUGS 言語: ベイズモデルを記述する言語

```
model { # BUGS コードで定義された階層ベイズモデルの例
  for (i in 1:N.site) {
    Y[i] ~ dpois(mean[i])          # 観測データと密度の関係
    log(mean[i]) <- beta + re[i]  # (全体の平均) + (場所差)
  }
  # 場所差 re[i] を CAR model で生成
  re[1:N.site] ~ car.normal(Adj[], Weights[], Num[], tau)
  beta ~ dnorm(0, 1.0E-2)        # 全体の平均は無情報事前分布
  tau ~ dgamma(1.0E-2, 1.0E-2) # tau の無情報事前分布
}
```



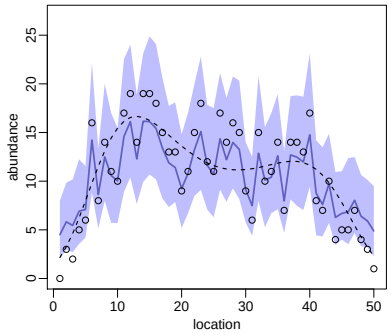
空間相関のある「場所差」モデルの推定結果

空間相関を考慮するモデル
欠測データなし



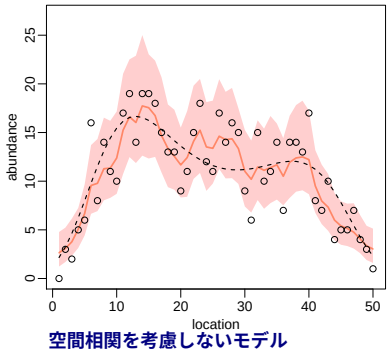
空間相関を考慮しないベイズモデルの推定結果

空間相関を考慮しないモデル
欠測データなし



空間相関を考慮する vs しないモデル

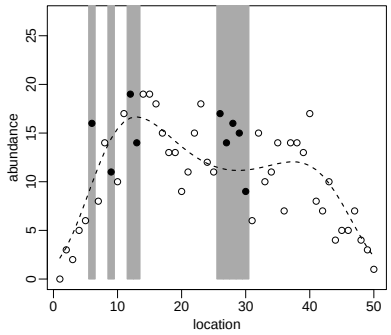
空間相関を考慮するモデル
欠測データなし



空間相関を考慮しないモデル
欠測データなし

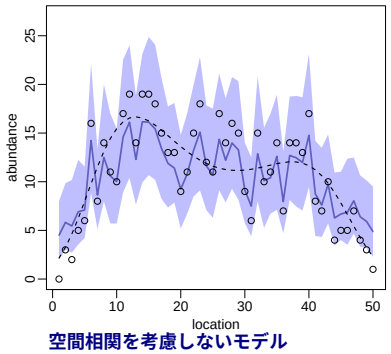
架空の例題 (続): 欠測がある場合は?!

欠測あり　　欠測値の予測!



空間相関を考慮しないベイズモデルは欠測にヨワい

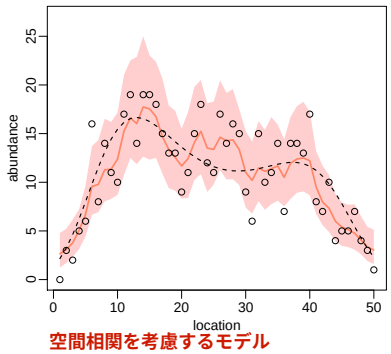
空間相関を考慮しないモデル
欠測データなし



空間相関を考慮しないモデル
欠測あり

空間相関を考慮するモデルは欠測に頑健

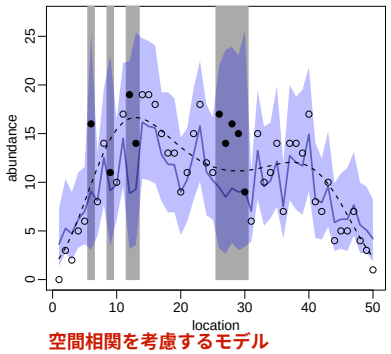
空間相関を考慮するモデル
欠測データなし



空間相関を考慮するモデル
欠測あり

ベイズモデルのご利益: 欠測をうまく対処

空間相関を考慮しないモデル
欠測あり



空間相関を考慮するモデル
欠測あり

まとめ: 空間構造のあるランダム効果

- ガウス確率場 (Gaussian random field) で「隣と似ている」ランダム効果を表現する
- 各地点独立と仮定するランダム効果でも，それっぽい推定はできないこともない
- しかし欠測のあるデータセットの解析においては，空間相関を考慮したベイズ統計モデルが威力を発揮するだろう
- ガウス確率場のモデリングはさらにいろいろと工夫できる— よりなめらかに変化させるような方法もある