

統計モデリング入門 道総研 [05]

モデル選択と検定

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp, @KuboBook

道総研勉強会 <http://goo.gl/HQbeoh>

2015-11-16

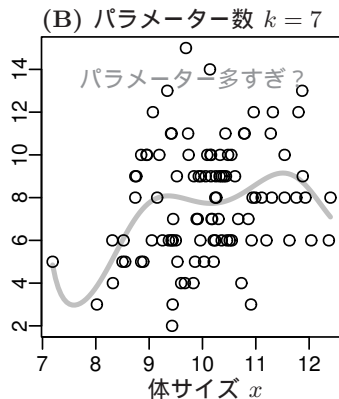
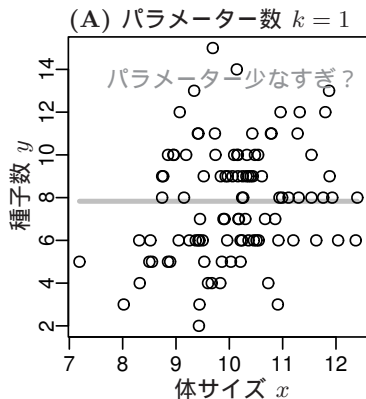
ファイル更新時刻: 2015-11-15 21:10

1. AIC を使ったモデル選択

あてはまりの悪さ: deviance

そして予測の悪さ: AIC

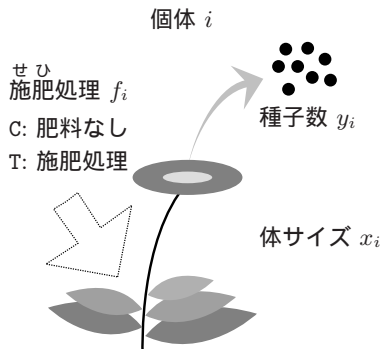
パラメーター数 k は多くても少なくてもへん?



“良いモデル” とはなにか? k も重要なのか?

個体サイズと実験処理の効果を調べる例題

- 応答変数: 種子数 $\{y_i\}$
- 説明変数:
 - 体サイズ $\{x_i\}$
 - 施肥処理 $\{f_i\}$



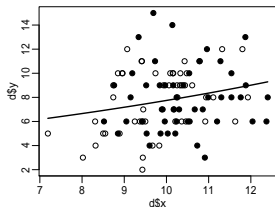
標本数

- 無処理 ($f_i = C$): 50 sample ($i \in \{1, 2, \dots, 50\}$)
- 施肥処理 ($f_i = T$): 50 sample ($i \in \{51, 52, \dots, 100\}$)

この例題のための統計モデル

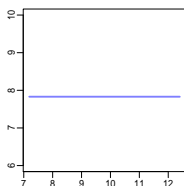
ポアソン回帰のモデル

- 確率分布: **ポアソン分布**
- 線形予測子: $\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 f_i$
- リンク関数: **対数リンク関数**



4 つの可能なモデル候補: (A) constant λ

$$\lambda_i = \exp(\beta_1)$$

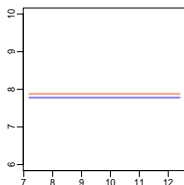


あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ 1, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -237.64 (df=1)
```

4 つの可能なモデル候補: (B) f model

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_3 f_i)$$

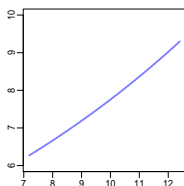


あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ f, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -237.63 (df=2)
```

4 つの可能なモデル候補: (C) x model

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

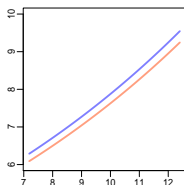


あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ x, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -235.39 (df=2)
```


4 つの可能なモデル候補: (D) $x + f$ model

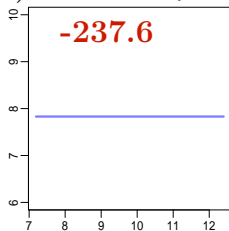
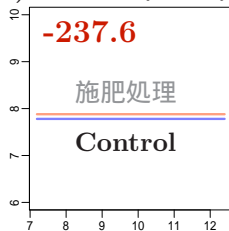
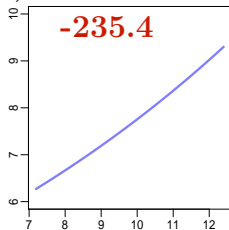
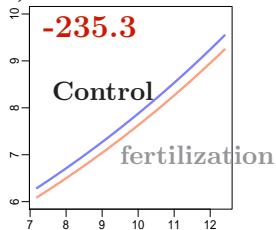
$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 f_i)$$



あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ x + f, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -235.29 (df=3)
```

パラメーター数が多いとあてはまりが良い

(A) constant λ ($k = 1$)(B) f model ($k = 2$)(C) x model ($k = 2$)(D) x + f model ($k = 3$)

2. AIC を使ったモデル選択

あてはまりの悪さ: deviance

そして予測の悪さ: AIC

R の glm() は deviance を出力

```
> glm(y ~ x + f, data = d, family = poisson)
```

```
Call:  glm(formula = y ~ x + f, family = poisson, data = d)
```

Coefficients:

(Intercept)	x	fT
1.2631	0.0801	-0.0320

```
Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null); 97 Residual
```

```
Null Deviance: 89.5
```

```
Residual Deviance: 84.8 AIC: 477
```

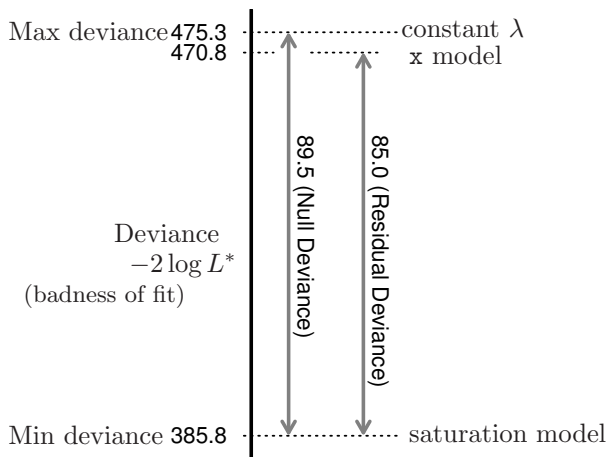
Residual Deviance? Null Deviance? AIC?

$$\text{deviance } D = -2 \times \log L^*$$

- Maximum log likelihood $\log L^*$: goodness of fit
- Deviance $D = -2 \log L^*$: badness of fit

model	k	$\log L^*$	Deviance $-2 \log L^*$	Residual deviance
constant λ	1	-237.6	475.3	89.5
f	2	-237.6	475.3	89.5
x	2	-235.4	470.8	85.0
x + f	3	-235.3	470.6	84.8
saturation	100	-192.9	385.8	0.0

Null deviance, Residual deviance, ...



予測の悪さ: $AIC = -2 \log L^* + 2k$

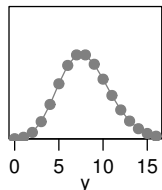
AIC 最小のモデルを選ぶ

model	k	$\log L^*$	Deviance $-2 \log L^*$	Residual deviance	AIC
constant λ	1	-237.6	475.3	89.5	477.3
f	2	-237.6	475.3	89.5	479.3
x	2	-235.4	470.8	85.0	474.8
x + f	3	-235.3	470.6	84.8	476.6
saturation	100	-192.9	385.8	0.0	585.8

AIC: A (or Akaike) information criterion

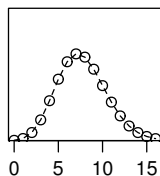
統計モデルによる推測って何だっけ？

(人間には見えない)
真の統計モデル
 $\beta_1 = 2.08$ のポアソン分布



データをサンプル

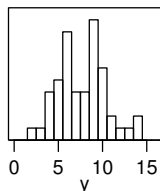
推定用の観測データ



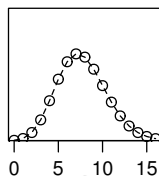
観測データから
推定された constant λ
 $\hat{\beta}_1 = 2.04$ のポアソン分布



パラメーター推定



推定に使ったデータであてはまりを評価している？

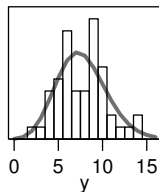


観測データから
推定された constant λ
 $\hat{\beta}_1 = 2.04$ のポアソン分布



推定用の観測データを使って
あてはまりの良さを評価

すると最大対数尤度
 $\log L^*$ が得られる

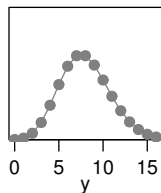


推定用の観測データ

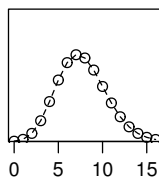
パラメーター推定に使った
データなのであてはまりの
良さにバイアスが生じる
(過大評価)

重要なこと: **新データ**があてはまるかどうか

(人間には見えない)
真の統計モデル
 $\beta_1 = 2.08$ のポアソン分布

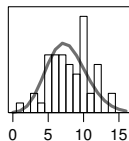
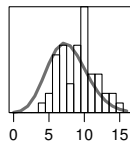
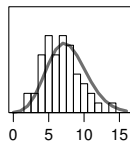


データ
をサンプル
(実際のデータ解析
では不可能)



観測データから
推定された constant λ
 $\hat{\beta}_1 = 2.04$ のポアソン分布

評価用のデータに
あてはめてみる
すると平均対数尤度
 $E(\log L)$ が得られる

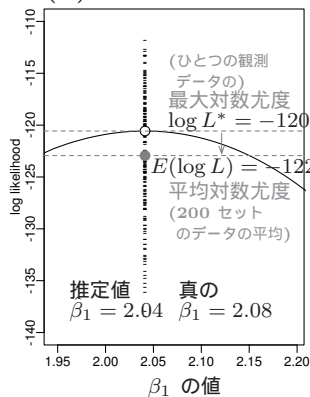


...

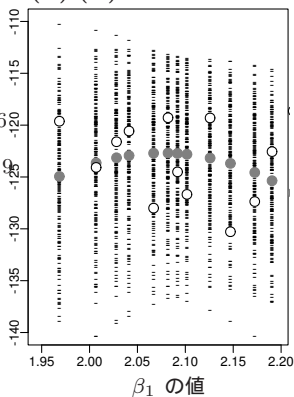
予測の良さ評価用のデータ (200 セット)

シミュレーションで予測の良さを調べる

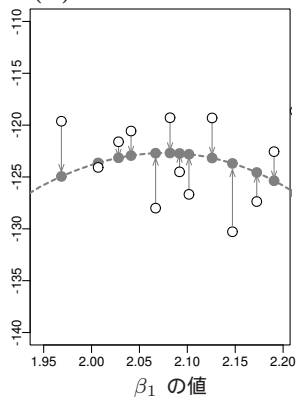
(A) 観測データがひとつ



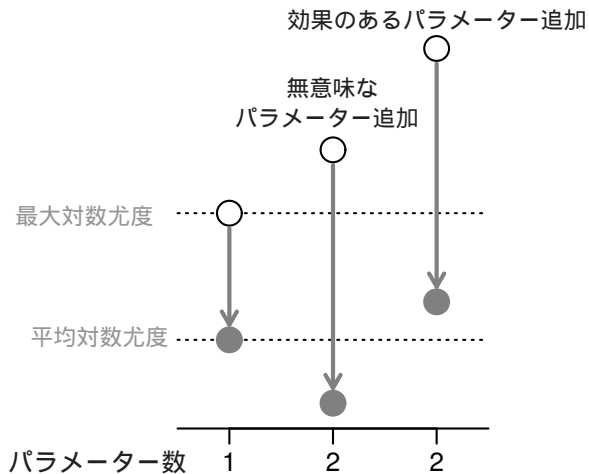
(B) (A) を何度もくりかえす



(C) バイアス補正



バイアス補正を図示してみる



3. 統計学的な検定

そして、その非対称性

ここでは 尤度比検定 を紹介

モデル選択 と統計学的検定 は その目的がぜんぜんちがう

目的?

モデル選択: よい予測をするモデルの
探索

統計学的検定: 帰無仮説の排除 (あとで
説明)

しかしモデル選択と検定の手順は途中まで同じ

統計モデルの検定

AIC によるモデル選択

解析対象のデータを確定



データを説明できるような統計モデルを設計

(帰無仮説・対立仮説)

(単純モデル・複雑モデル)



ネストした統計モデルたちのパラメーターの^{さいゆう}最尤推定計算



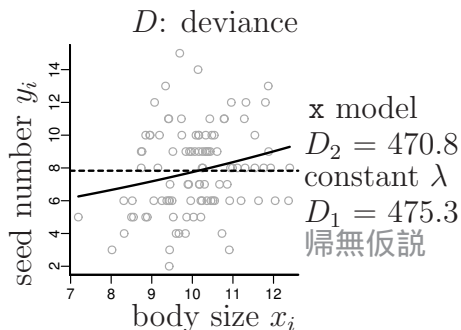
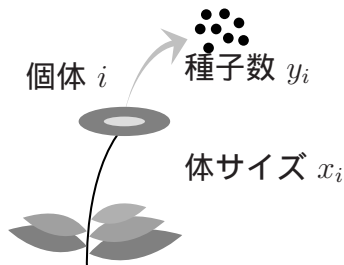
帰無仮説棄却の危険率を評価



モデル選択規準 AIC の評価



また同じ例題





(施肥処理は無視!)

検定統計量 $\Delta D_{1,2}$

difference in deviance $\Delta D_{1,2} = D_1 - D_2 = 4.51 \approx 4.5$




likelihood ratio? $-\log \frac{L_1^*}{L_2^*} = \log L_1^* - \log L_2^*$

model	k	$\log L^*$	Deviance $-2 \log L^*$	
constant λ	1	-237.6	$D_1 = 475.3$	帰無仮説 
x	2	-235.4	$D_2 = 470.8$	対立仮説 

検定の非対称性: 帰無仮説はゴミあつかい
.....にもかかわらず、帰無仮説だけをしつこく調べる


検定の目的: 帰無仮説 の棄却

	観察された逸脱度差 $\Delta D_{1,2} = 4.5$ は.....	
帰無仮説は	「めったにない差」 (帰無仮説を棄却)	「よくある差」 (棄却できない)
真のモデルである	第一種の過誤	(問題なし)
真のモデルではない	(問題なし)	第二種の過誤

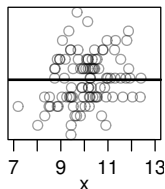
 is ...	significant (Reject )	not significant (Not reject )
TRUE	Type I error	(no problem)
NOT true	(no problem)	Type II error

検定の非対称性: 第一種の過誤だけに注目

$\Delta D_{1,2}$ の分布を生成: ブートストラップ尤度比検定

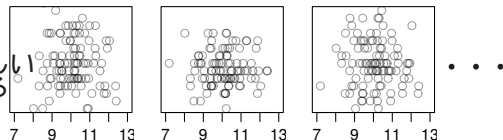
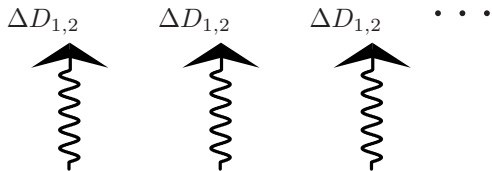
帰無仮説  が真のモデルであるとして!

帰無仮説が真の統計モデル
ということにしてしまう
($\hat{\beta}_1 = 2.06$ のポアソン分布)




帰無仮説のモデルから新しい
データをたくさん生成する

評価用データに constant λ と x model
をあてはめて逸脱度差 $\Delta D_{1,2}$ の分布を予測



あてはまりの良さ評価用のデータ (多数)

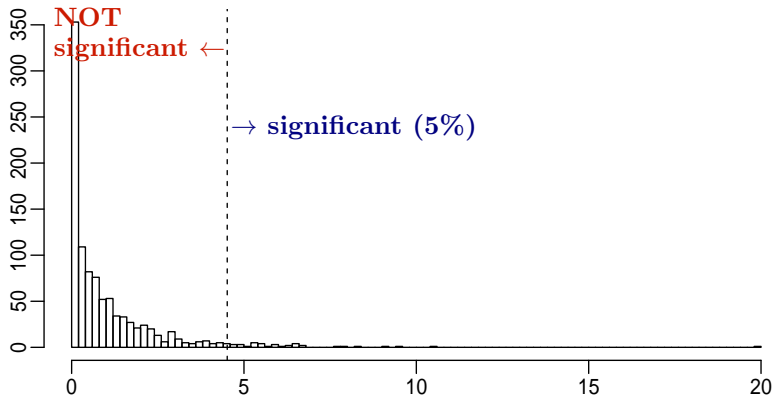
How to generate $\Delta D_{1,2}$ under  is TRUE?

```
> d$y.rnd <- rpois(100, lambda = mean(d$y))
> fit1 <- glm(y.rnd ~ 1, data = d, family = poisson)
> fit2 <- glm(y.rnd ~ x, data = d, family = poisson)
> fit1$deviance - fit2$deviance
```

- `rpois()` によるポアソン乱数の生成 (架空データ)
- 架空データを使って `glm()` あてはめ

あらかじめ**棄却域**を決めておく

たとえば 5% とか？

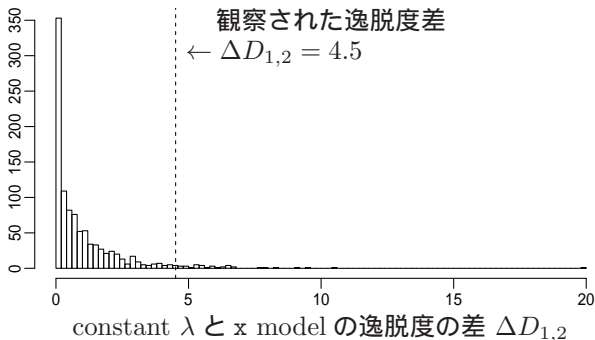


A random $\Delta D_{1,2}$ generator in R

```
get.dd <- function(d) # データの生成と逸脱度差の評価
{
  n.sample <- nrow(d) # データ数
  y.mean <- mean(d$y) # 標本平均
  d$y.rnd <- rpois(n.sample, lambda = y.mean)
  fit1 <- glm(y.rnd ~ 1, data = d, family = poisson)
  fit2 <- glm(y.rnd ~ x, data = d, family = poisson)
  fit1$deviance - fit2$deviance # 逸脱度の差を返す
}

pb <- function(d, n.bootstrap)
{
  replicate(n.bootstrap, get.dd(d))
}
```

Generated distribution of $\Delta D_{1,2} = D_1 - D_2$



(R code is in the next page)

$$\text{Probability}\{\Delta D_{1,2} \geq 4.5\} = \frac{38}{1000} = 0.038$$

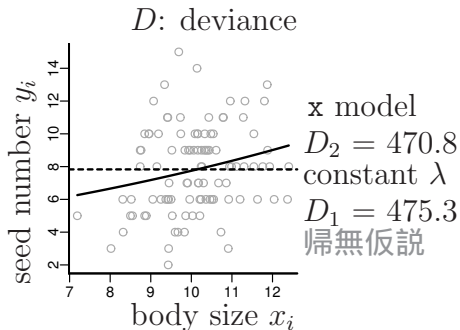
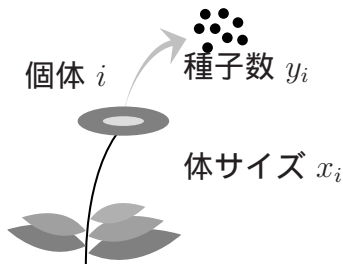
```
> source("pb.R") # reading "pb.R" text file
> dd12 <- pb(d, n.bootstrap = 1000)
> hist(dd12, 100) # to plot histogram
> abline(v = 4.5, lty = 2)
> sum(dd12 >= 4.5)
[1] 38
```

so-called “*P*-value” is 0.038.

In this case, 帰無仮説  is rejected

So we can state that 対立仮説  can be accepted.

x model is better than constant λ .



In case that $P > 0.05$...?

何も結論できない

λ 一定のモデルが良いとは言えない

検定の非対称性: 帰無仮説



はけっして受容されない