統計モデリング入門 2015 (c)

Poisson regression, a generalized linear model (GLM)
一般化線形モデル: ポアソン回帰

久保拓弥 kubo@ees.hokudai.ac.jp

北大環境科学院の講義 http://goo.gl/76c4i

2015–07–13

ファイル更新時刻: 2015–07–12 15:54

agenda

今日のハナシ I

Poisson regression

1. **ポアソン回帰の統計モデル**

   response variable　explanatory variable

   応答変数 y **と** **説明変数** x

2. **ポアソン回帰の例題: 架空植物の種子数データ**

   植物個体の属性，あるいは実験処理が種子数に影響?

how to specify GLM

3. GLM **の詳細を指定する**

   probability distribution, linear predictor and link function

   確率分布・線形予測子・リンク関数

4. R **で** GLM **のパラメーターを推定**

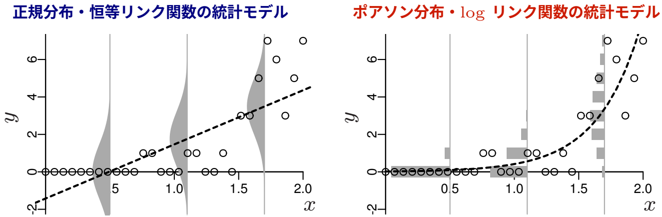
   あてはまりの良さは対数尤度関数で評価

5. **処理をした・しなかった 効果も統計モデルに入れる**

   factor type

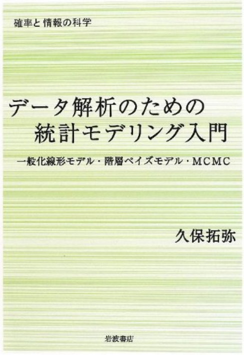
   GLM **の 因子型説明変数**

agenda
今日のハナシ II



今日の内容と「統計モデリング入門」との対応

http://goo.gl/Ufq2



今日はおもに「第 3 章 一般化線形モデル (GLM)」の内容を説明します.

- **著者**: **久保拓弥**
- **出版社**: **岩波書店**
- 2012–05–18 **刊行**

一般化線形モデルって何だろう?

Generalized Linear Model

一般化線形モデル (GLM)

- ポアソン回帰 (Poisson regression)
- ロジスティック回帰 (logistic regression)
- 直線回帰 (linear regression)
- ・・・・・・

Poisson regression

1. ポアソン回帰の統計モデル

response variable　　explanatory variable

応答変数 y と 説明変数 x

一般化線形モデルにとりくんでみる

statistaical models appeared in the class

この授業であつかう統計モデルたち

The development of linear models

parameter estimation

MCMC

Hierarchical Bayesian Model

Be more flexible

Generalized Linear Mixed Model (GLMM)

MLE

Incoporating random effects such as individuality

Generalized Linear Model (GLM)

MSE

Always normal distribution? That's non-sense!

Linear model

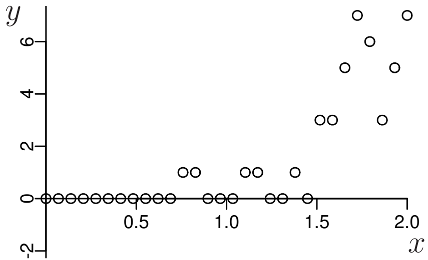
Kubo Doctrine: "Learn the evolution of linear-model family, firstly!"

suppose that you have a "count data" set ...

0 個, 1 個, 2 個と数えられるデータ

カウントデータ ($y \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ **なデータ**)

response variable
応答変数



explanatory variable
説明変数

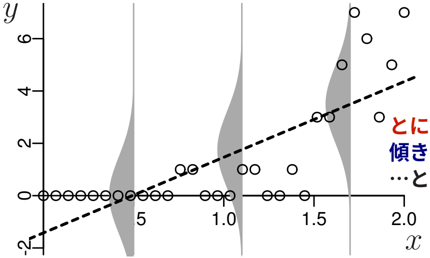
- **たとえば** x **は植物個体の大きさ，**y **はその個体の花数**
- **体サイズが大きくなると花数が増えるように見えるが……**
- **この現象を表現する統計モデルは**?

the normal distribution sucks!

正規分布を使った統計モデル …… ムリがある?

正規分布・恒等リンク関数の統計モデル

response variable
応答変数



explanatory variable
説明変数

NO!

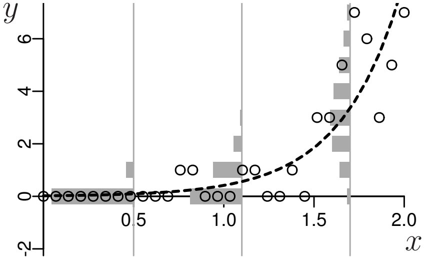
とにかくセンひきゃいいんでしょ
傾き「ゆーい」ならいいんでしょ
…という安易な発想のデータ解析

- タテ軸のばらつきは「正規分布」なのか?
- y の値は 0 以上なのに ……
- 平均値がマイナス?

the Poisson disribution approximates data
ポアソン分布を使った統計モデルなら良さそう?!

ポアソン分布・対数リンク関数の統計モデル

response variable
応答変数



YES!

explanatory variable
説明変数

- タテ軸に対応する「ばらつき」
- 負の値にならない「平均値」
- 正規分布を使ってるモデルよりましだね

2. ポアソン回帰の例題: 架空植物の種子数データ

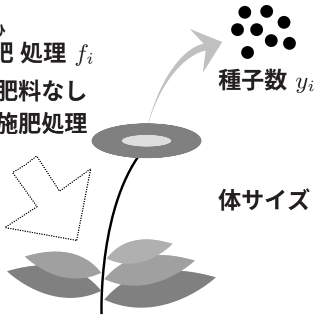
植物個体の属性，あるいは実験処理が種子数に影響?

まずはデータの概要を調べる

body size x and fertilization f change seed number y?

個体サイズと実験処理の効果を調べる例題

- response variable 応答変数 : seed number 種子数 $\{y_i\}$
- explanatory variable 説明変数 :
  - body size 体サイズ $\{x_i\}$
  - fertilization 施肥処理 $\{f_i\}$



sample size 標本数

- control 無処理 ($f_i =$ C): 50 sample ($i \in \{1, 2, \cdots 50\}$)
- treated 施肥処理 ($f_i =$ T): 50 sample ($i \in \{51, 52, \cdots 100\}$)

Reading data file
データファイルを読みこむ

data3a.csv は CSV (comma separated value) format file なので，R で読みこむには以下のようにする:

```
> d <- read.csv("data3a.csv")
```

データは d と名付けられた data frame (表みたいなもの) に格納される

とりあえず

data frame d を表示

```
> d
    y     x f
1   6  8.31 C
2   6  9.44 C
3   6  9.50 C
...  (中略)  ...
99  7 10.86 T
100 9  9.97 T
```

data frame d を調べる: dx, dy

```
> d$x
  [1]  8.31  9.44  9.50  9.07 10.16  8.32 10.61 10.06
  [9]  9.93 10.43 10.36 10.15 10.92  8.85  9.42 11.11
... (中略) ...
 [97]  8.52 10.24 10.86  9.97

> d$y
  [1]  6  6  6 12 10  4  9  9  9 11  6 10  6 10 11  8
 [17]  3  8  5  5  4 11  5 10  6  6  7  9  3 10  2  9
... (中略) ...
 [97]  6  8  7  9
```

data frame d を調べる: d$f — factor type!

施肥処理の有無をあらわす f 列はちょっと様子がちがう

```
> d$f
  [1] C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C
 [26] C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C C
 [51] T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T
 [76] T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T T
Levels: C T
```

data type: factor

因子型データ: いくつかの 水準 (levels) をもつデータ

ここでは C と T の 2 水準 (levels)

data type and class

R のデータのクラスとタイプ

```
> class(d) # d は data.frame クラス
[1] "data.frame"
> class(d$y) # y 列は整数だけの integer クラス
[1] "integer"
> class(d$x) # x 列は実数も含むので numeric クラス
[1] "numeric"
> class(d$f) # そして f 列は factor クラス
[1] "factor"
```

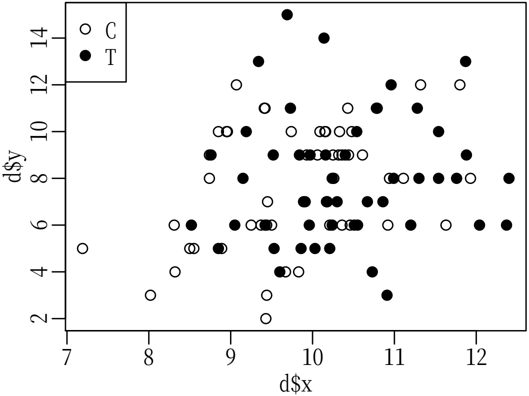
data frame の summary()

```
> summary(d)
       y               x            f
 Min.   : 2.00   Min.   : 7.190   C:50
 1st Qu.: 6.00   1st Qu.: 9.428   T:50
 Median : 8.00   Median :10.155
 Mean   : 7.83   Mean   :10.089
 3rd Qu.:10.00   3rd Qu.:10.685
 Max.   :15.00   Max.   :12.400
```

you should plot data!! always!!

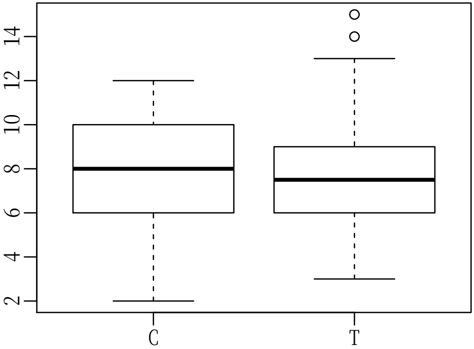
データはとにかく図示する!

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f])
> legend("topleft", legend = c("C", "T"), pch = c(21, 19))
```



施肥処理 f を横軸とした図

```
> plot(d$f, d$y)
```



how to specify GLM

3. GLM の詳細を指定する

probability distribution, linear predictor and link function

確率分布・線形予測子・リンク関数

ポアソン回帰では log link **関数を使うのが便利**

how to specify GLM
一般化線形モデルを作る

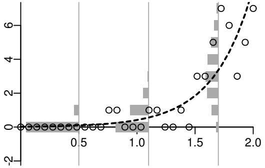
Generalized Linear Model
一般化線形モデル (GLM)

- probability distribution
  確率分布は?
- linear predictor
  線形予測子は?
- link function
  リンク関数は?

how to specify Poisson regression model, a GLM
GLM のひとつであるポアソン回帰モデルを指定する

ポアソン回帰のモデル

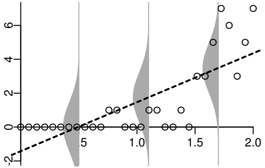
- probability distribution
  確率分布: Poisson distribution **ポアソン分布**
- linear predictor
  線形予測子: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function
  リンク関数: log link function **対数リンク関数**



how to specify linear regression model, a GLM
GLM のひとつである直線回帰モデルを指定する

直線回帰のモデル

- probability distribution
  確率分布 : Gaussian distribution 正規分布
- linear predictor
  線形予測子: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function
  リンク関数: identity link function 恒等リンク関数

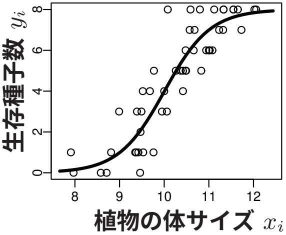


how to specify logistic regression model, a GLM

GLM のひとつである logistic 回帰モデルを指定する

ロジスティック回帰のモデル

- probability distribution binomial distribution
  確率分布 : **二項分布**
- linear predictor
  線形予測子: e.g., $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function
  リンク関数: logit **リンク関数**



「結果 ← 原因 (かも?)」を表現する線形モデル

result　cause??

- **結果: 応答変数**
- **原因: 説明変数**
- **線形予測子** (linear predictor):

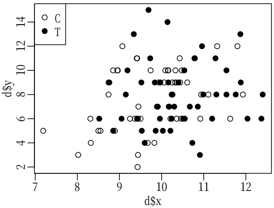
(応答変数の平均) = 定数 (切片)
+ (係数 1) × (説明変数 1)
+ (係数 2) × (説明変数 2)
+ (係数 3) × (説明変数 3)
+ ···

GLM functions in R
R で一般化線形モデルを

	probability distribution **確率分布**	random number generation **乱数発生**	GLM fitting GLM **あてはめ**
(離散)	ベルヌーイ分布	`rbinom()`	`glm(family = binomial)`
	二項分布	`rbinom()`	`glm(family = binomial)`
	ポアソン分布	`rpois()`	`glm(family = poisson)`
	負の二項分布	`rnbinom()`	`glm.nb()` in `library(MASS)`
(連続)	ガンマ分布	`rgamma()`	`glm(family = gamma)`
	正規分布	`rnorm()`	`glm(family = gaussian)`

- `glm()` で使える確率分布は上記以外もある
- GLM は直線回帰・重回帰・分散分析・ポアソン回帰・ロジスティック回帰その他の「よせあつめ」と考えてもよいかも
- 今日はポアソン回帰 を使った GLM だけ紹介します

Let's go back to today's example
さてさて，この例題にもどって



seed number y_i follows the Poisson distribution

種子数 y_i は平均 λ_i のポアソン分布にしたがう としましょう

$$p(y_i \mid \lambda_i) = \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!}$$

mean

個体 i の 平均 λ_i を以下のようにおいてみたらどうだろう……?

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

coefficient　parameter

- β_1 **と** β_2 **は　係数　(パラメーター)**

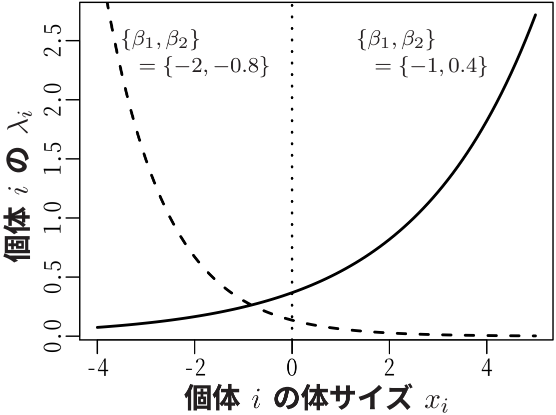
body size　no f_i, for simplicity

- x_i **は個体** i **の 体サイズ，** f_i **はとりあえず無視**

exponential function

指数関数ってなんだっけ?

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$



GLM のリンク関数と線形予測子

link function and linear predictor

個体 i の平均 λ_i

mean

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\log(\lambda_i)}_{\text{log link function}} = \underbrace{\beta_1 + \beta_2 x_i}_{\text{linear predictor}}$$

log link function　linear predictor

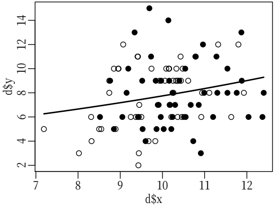
log(平均) = 線形予測子

log リンク関数とよばれる理由は，上のようになっているから

a statistical model for this example
この例題のための統計モデル

ポアソン回帰のモデル

- probability distribution 確率分布 : Poisson distribution **ポアソン分布**
- linear predictor 線形予測子: $\beta_1 + \beta_2 x_i$
- link function リンク関数: log link function **対数リンク関数**



4. R で GLM のパラメーターを推定

あてはまりの良さは対数尤度関数で評価

推定計算はコンピューターにおまかせ

glm() 関数 の指定

function

```
> d
    y     x  f
1   6  8.31  C
2   6  9.44  C
3   6  9.50  C
... (中略) ...
99  7 10.86  T
100 9  9.97  T
```

Is that all?
これだけ!

```
> fit <- glm(y ~ x, data = d, family = poisson)
```

details of arguments
glm() 関数の指定の意味

結果を格納するオブジェクト

関数名

確率分布の指定

```
fit <- glm(
  y ~ x,
  family = poisson(link = "log"),
  data = d
)
```

モデル式

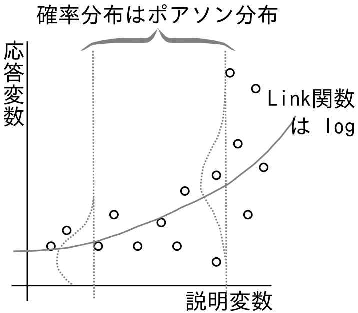
data.frame の指定

リンク関数の指定
（省略可）

- **モデル式 (線形予測子 z): どの説明変数を使うか?**
- link **関数: z と応答変数 (y) 平均値 の関係は?**
- family**: どの確率分布を使うか?**

glm() 関数の指定を 再確認 (recheck)

- family: poisson, **ポアソン分布**
- link **関数**: "log"
- **モデル式** (**線形予測子** z): **たとえば** y ~ x **と指定したとする**



- **線形予測子** $z = \beta_1 + \beta_2 x$
  β_1, β_2 **は推定すべきパラメーター**
- **応答変数の平均値を** λ **とすると** $\log(\lambda) = z$
  つまり $\lambda = \exp(z) = \exp(\beta_1 + \beta_2 x)$
- **応答変数 は平均** λ **のポアソン分布に従う**: $y \sim \text{Pois}(\lambda)$

glm() 関数の 出力 (output)

```
> fit <- glm(y ~ x, data = d, family = poisson)

all:  glm(formula = y ~ x, family = poisson, data = d)

Coefficients:
(Intercept)            x
     1.2917       0.0757

Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null);  98 Residual
Null Deviance:     89.5
Residual Deviance: 85  AIC: 475
```

detailed output

glm() 関数のくわしい出力

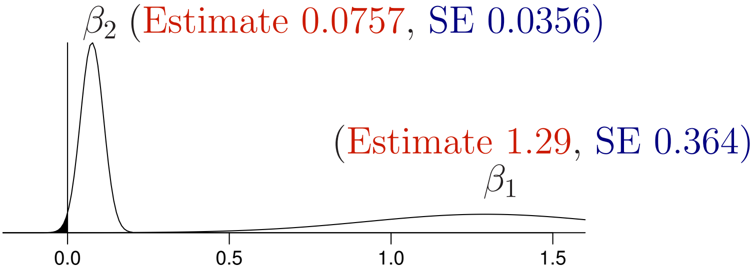
```
> summary(fit)
Call:
glm(formula = y ~ x, family = poisson, data = d)

Deviance Residuals:
   Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.368  -0.735  -0.177   0.699   2.376

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   1.2917     0.3637    3.55  0.00038
x             0.0757     0.0356    2.13  0.03358
```

……（以下，省略）……

推定値 (estimate) と 標準誤差 (standard error)



この図の要点:

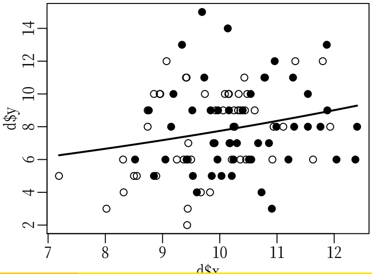
- 確率 p は **ゼロからの距離** をあらわしている
- p がゼロに近いほど **推定値** $\hat{\beta}$ はゼロから離れている
- p が 0.5 に近いほど **推定値** $\hat{\beta}$ はゼロに近い

model prediction
モデルの予測

```
> fit <- glm(y ~ x, data = d, family = poisson)
...
Coefficients:
(Intercept)            x
     1.2917       0.0757

> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f]) # data
> xp <- seq(min(d$x), max(d$x), length = 100)
> lines(xp, exp(1.2917 + 0.0757 * xp))
```

the figure shows the relationship
ここでは観測データと予測の関係
between model prediction and data
を見ているだけ，なのだが

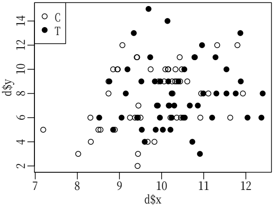


5. 処理をした・しなかった 効果も統計モデルに入れる

factor type
GLM の **因子型説明変数**

数量型 + **因子型 という組み合わせで**

Add fertilization effects
肥料の効果 f_i もいれましょう



seed number y_i follows the Poisson distribution

種子数 y_i は平均 λ_i のポアソン分布にしたがう としましょう

$$p(y_i \mid \lambda_i) = \frac{\lambda_i^{y_i} \exp(-\lambda_i)}{y_i!}$$

mean

個体 i の 平均 λ_i を次のようにする

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 d_i)$$

- β_3 **は 施肥処理の効果 の 係数** (fertilization effects coefficient)
- f_i **の ダミー変数** (dummy variable)

$$d_i = \begin{cases} 0 & (f_i = \texttt{C} \text{ の場合}) \\ 1 & (f_i = \texttt{T} \text{ の場合}) \end{cases}$$

glm(y ∼ x + f, ...) の output 出力

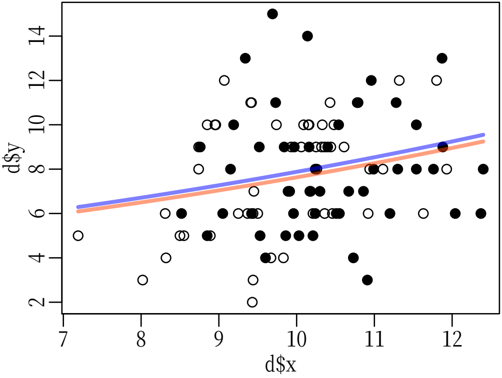
```
> summary(glm(y ~ x + f, data = d, family = poisson))
...(略)...

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)   1.2631     0.3696    3.42  0.00063
x             0.0801     0.0370    2.16  0.03062
fT           -0.0320     0.0744   -0.43  0.66703
```

……（以下，省略）……

x + f モデルの予測
model prediction

```
> plot(d$x, d$y, pch = c(21, 19)[d$f]) # data
> xp <- seq(min(d$x), max(d$x), length = 100)
> lines(xp, exp(1.2631 + 0.0801 * xp), col = "blue", lwd = 3) # C
> lines(xp, exp(1.2631 + 0.0801 * xp - 0.032), col = "red", lwd = 3) # T
```

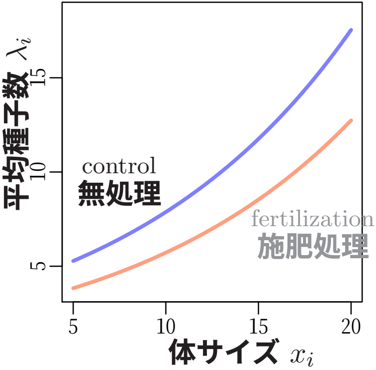


multiple explanatory variables

複数の説明変数をいれた場合の統計モデル

- $f_i = \texttt{C}$: $\lambda_i = \exp(1.26 + 0.0801 x_i)$
- $f_i = \texttt{T}$: $\lambda_i = \exp(1.26 + 0.0801 x_i - 0.032)$

$$= \exp(1.26 + 0.0801 x_i) \times \exp(-0.032)$$



施肥効果である $\exp(-0.032)$ は かけ算できくことに注意!

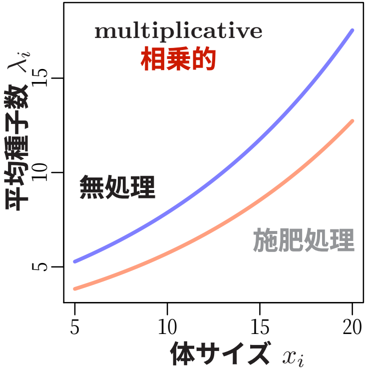
model interpretation depends on link function

リンク関数が違うとモデルの解釈が異なる

log link function

(A) 対数リンク関数

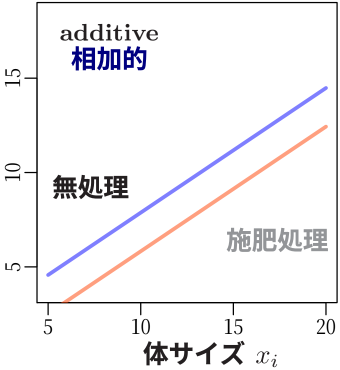
$\lambda = \exp(\beta_1 + \beta_2 x + \cdots)$



identity link function

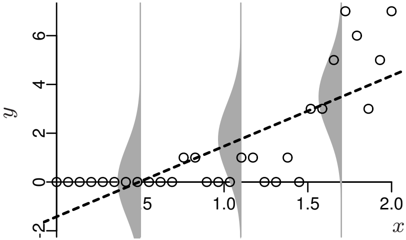
(B) 恒等リンク関数

$\lambda = \beta_1 + \beta_2 x + \cdots$

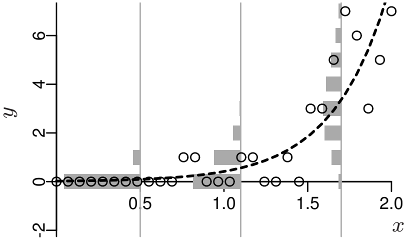


GLM: 適切な probability distribution 確率分布 と link function リンク関数 を選ぶ

正規分布・恒等リンク関数の統計モデル



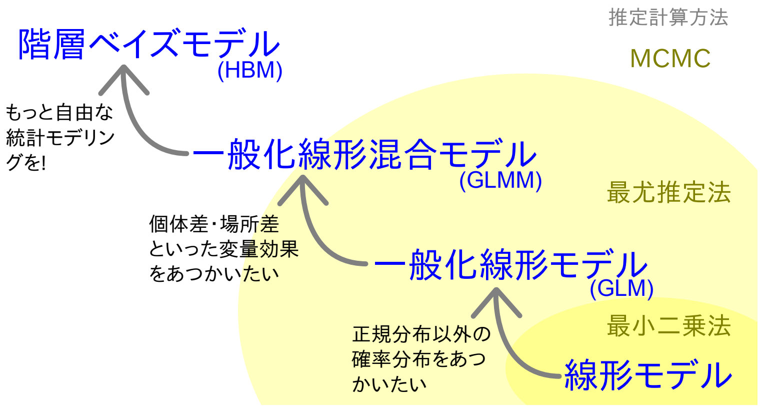
ポアソン分布・log リンク関数の統計モデル



statistaical models appeared in the class

この授業であつかう統計モデルたち

線形モデルの発展



データの特徴にあわせて線形モデルを改良・発展させる

statistaical models appeared in the class

この授業であつかう統計モデルたち

The development of linear models

parameter estimation

MCMC

Hierarchical Bayesian Model

Be more flexible

Generalized Linear Mixed Model (GLMM)

MLE

Incoporating random effects such as individuality

Generalized Linear Model (GLM)

Always normal distribution? That's non-sense!

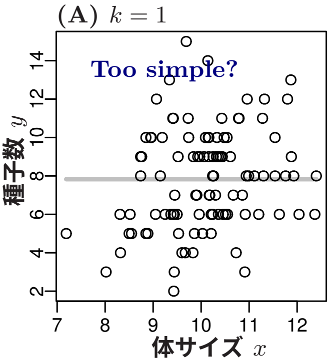
MSE

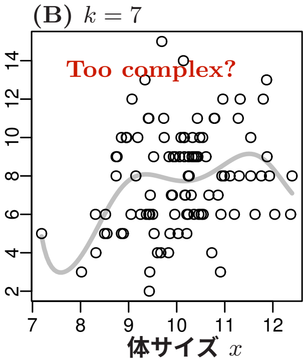
Linear model

Kubo Doctrine: "Learn the evolution of linear-model family, firstly!"

次回予告

The next topic





モデル選択と統計学的検定

Model selection and statistical test