

# 統計モデリング入門 2014 (4)

## モデル選択と検定

久保拓弥 [kubo@ees.hokudai.ac.jp](mailto:kubo@ees.hokudai.ac.jp)

北大環境科学院の講義 <http://goo.gl/XeBR2x>

2014-07-14

ファイル更新時刻: 2014-07-11 17:15

# 今日のハナシ I

## ① 前回と同じ例題: 種子数データ

植物個体の属性,あるいは実験処理が種子数に影響?

## ② AIC を使ったモデル選択

あてはまりの悪さ: deviance

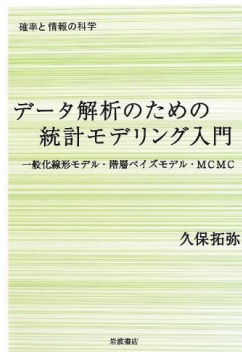
## ③ 統計学的な検定

そして,その非対称性

# 今日の内容と「統計モデリング入門」との対応

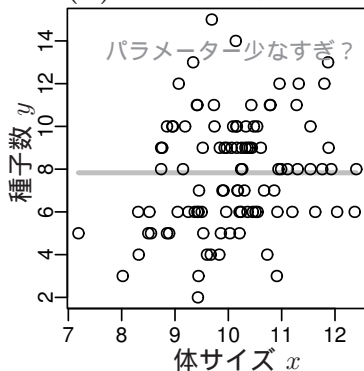
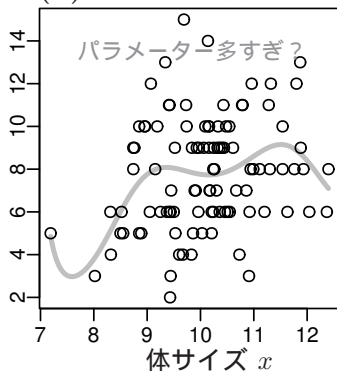
今日はおもに「**第4章** GLMのモデル選択」と「**第5章** GLMの尤度比検定と検定の非対称性」の内容を説明します。

<http://goo.gl/Ufq2>



- 著者: 久保拓弥
- 出版社: 岩波書店
- 2012-05-18 刊行

# パラメーター数は多くても少なくてもヘン?

(A) パラメーター数  $k = 1$ (B) パラメーター数  $k = 7$ 

What is the “best?” parameter number  $k$ ?

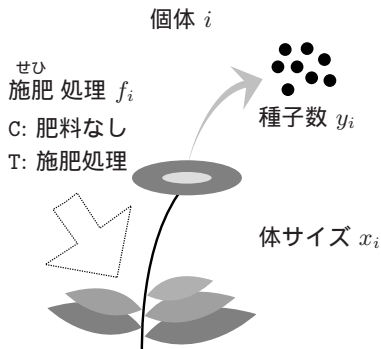
# 1. 前回と同じ例題: 種子数データ

植物個体の属性, あるいは実験処理が種子数に影響?

まずはデータの概要を調べる

# 個体サイズと実験処理の効果を調べる例題

- 応答変数: 種子数  $\{y_i\}$
- 説明変数:
  - 体サイズ  $\{x_i\}$
  - 施肥処理  $\{f_i\}$



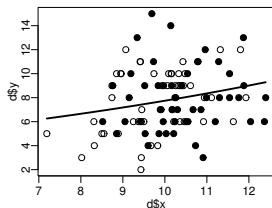
## 標本数

- 無処理 ( $f_i = C$ ): 50 sample ( $i \in \{1, 2, \dots, 50\}$ )
- 施肥処理 ( $f_i = T$ ): 50 sample ( $i \in \{51, 52, \dots, 100\}$ )

# この例題のための統計モデル

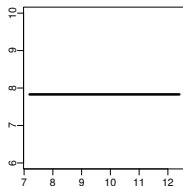
## ポアソン回帰のモデル

- 確率分布: **ポアソン分布**
- 線形予測子:  $\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 f_i$
- リンク関数: **対数リンク関数**



## 4つの可能なモデル候補: (A) constant $\lambda$

$$\lambda_i = \exp(\beta_1)$$



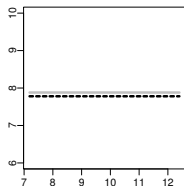
あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ 1, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -237.64 (df=1)
```



## 4 つの可能なモデル候補: (B) f model

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_3 f_i)$$

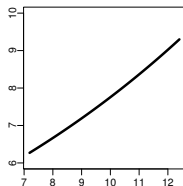


あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ f, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -237.63 (df=2)
```

## 4 つの可能なモデル候補: (C) x model

$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)$$

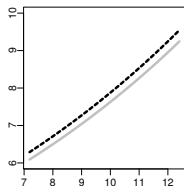


あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ x, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -235.39 (df=2)
```

## 4 つの可能なモデル候補: (D) $x + f$ model

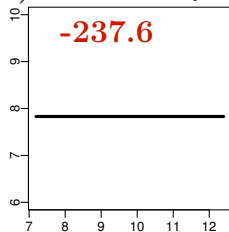
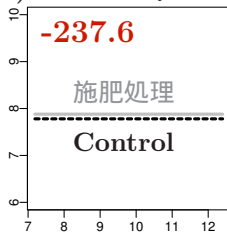
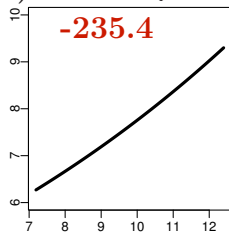
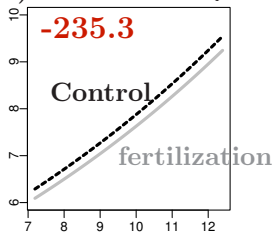
$$\lambda_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 f_i)$$



あてはまりの良さを対数尤度 (log likelihood) で評価する

```
> logLik(glm(y ~ x + f, data = d, family = poisson))  
'log Lik.' -235.29 (df=3)
```

# パラメーター数が多いとあてはまりが良い

(A) constant  $\lambda$  ( $k = 1$ )(B) f model ( $k = 2$ )(C) x model ( $k = 2$ )(D) x + f model ( $k = 3$ )

## 2. AIC を使ったモデル選択

あてはまりの悪さ: deviance

そして予測の悪さ: AIC

## R の glm() は deviance を出力

```
> glm(y ~ x + f, data = d, family = poisson)
```

```
Call:  glm(formula = y ~ x + f, family = poisson, data = d)
```

Coefficients:

(Intercept)	x	fT
1.2631	0.0801	-0.0320

```
Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null); 97 Residual
```

```
Null Deviance: 89.5
```

```
Residual Deviance: 84.8 AIC: 477
```

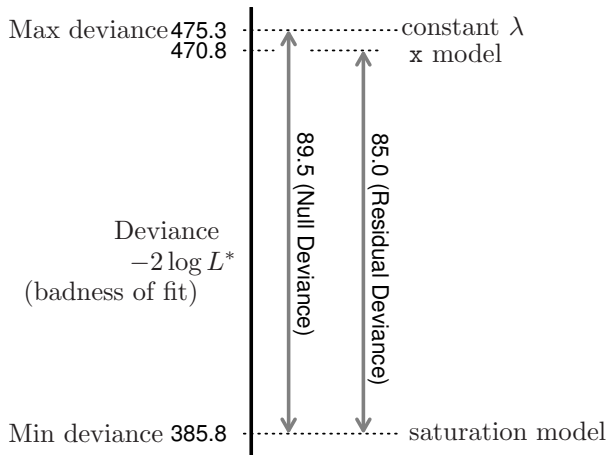
Residual Deviance? Null Deviance? AIC?

# deviance $D = -2 \times \log L^*$

- Maximum log likelihood  $\log L^*$ : goodness of fit
- Deviance  $D = -2 \log L^*$ : badness of fit

model	$k$	$\log L^*$	Deviance $-2 \log L^*$	Residual deviance
constant $\lambda$	1	-237.6	475.3	89.5
f	2	-237.6	475.3	89.5
x	2	-235.4	470.8	85.0
x + f	3	-235.3	470.6	84.8
saturation	100	-192.9	385.8	0.0

# Null deviance, Residual deviance, ...





予測の悪さ:  $AIC = -2 \log L^* + 2k$

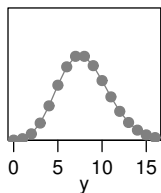
AIC 最小のモデルを選ぶ

model	$k$	$\log L^*$	Deviance $-2 \log L^*$	Residual deviance	AIC
constant $\lambda$	1	-237.6	475.3	89.5	477.3
f	2	-237.6	475.3	89.5	479.3
<b>x</b>	<b>2</b>	<b>-235.4</b>	<b>470.8</b>	<b>85.0</b>	<b>474.8</b>
x + f	3	-235.3	470.6	84.8	476.6
saturation	100	-192.9	385.8	0.0	585.8

AIC: A (or Akaike) information criterion

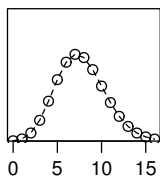
# 統計モデルによる推測って何だっけ？

(人間には見えない)  
真の統計モデル  
 $\beta_1 = 2.08$  のポアソン分布



データをサンプル

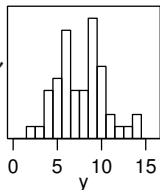
推定用の観測データ



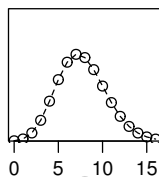
観測データから  
推定された constant  $\lambda$   
 $\hat{\beta}_1 = 2.04$  のポアソン分布



パラメーター推定



## 推定に使ったデータであてはまりを評価している？



観測データから  
推定された constant  $\lambda$   
 $\hat{\beta}_1 = 2.04$  のポアソン分布

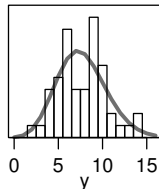


推定用の観測データを使って  
あてはまりの良さを評価

すると最大対数尤度  
 $\log L^*$  が得られる

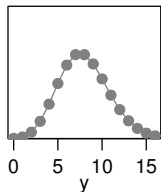
パラメータ推定に使った  
データなのであてはまりの  
良さにバイアスが生じる  
(過大評価)

推定用の観測データ

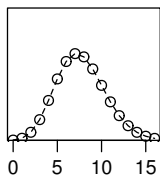


# 重要なこと: 「新データ」があてはまるかどうか

(人間には見えない)  
真の統計モデル  
 $\beta_1 = 2.08$  のポアソン分布

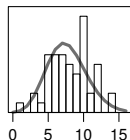
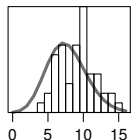
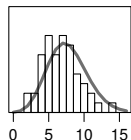


データ  
をサンプル  
(実際のデータ解析  
では不可能)



観測データから  
推定された constant  $\lambda$   
 $\hat{\beta}_1 = 2.04$  のポアソン分布

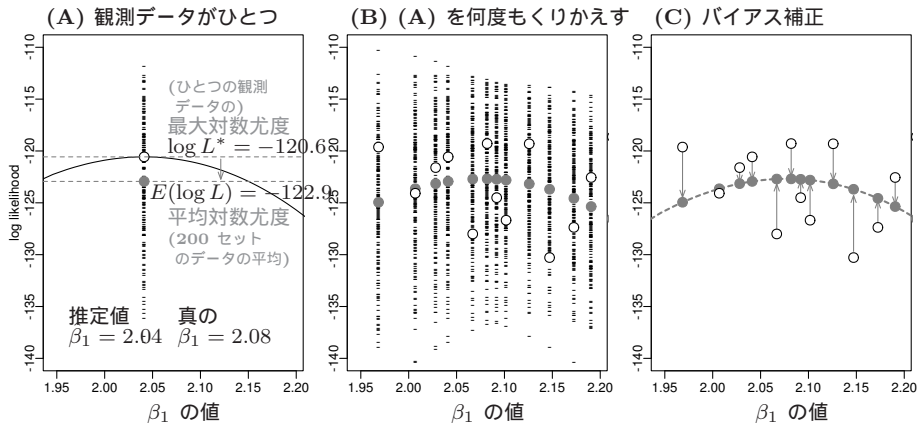
評価用のデータに  
あてはめてみる  
すると平均対数尤度  
 $E(\log L)$  が得られる



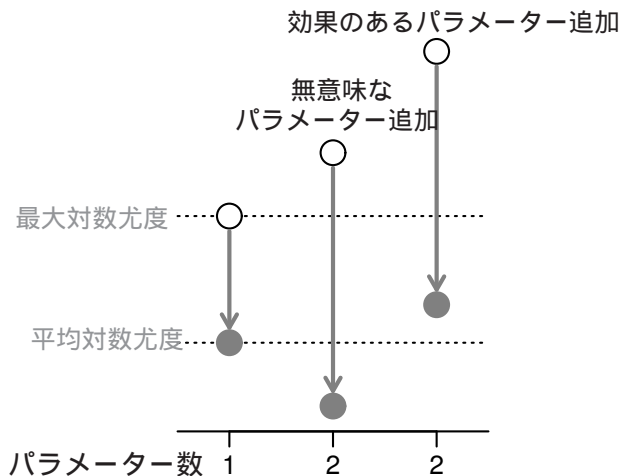
...

予測の良さ評価用のデータ (200 セット)

## シミュレーションで予測の良さを調べる



# バイアス補正を図示してみる



### 3. 統計学的な検定

そして、その非対称性

ここでは 尤度比検定 を紹介

# モデル選択 と統計学的検定 は その目的がぜんぜんちがう



目的?

モデル選択: よい予測をするモデルの  
探索

統計学的検定: 帰無仮説の排除 (あとで  
説明)

# しかしモデル選択と検定の手順は途中まで同じ

統計モデルの検定

AIC によるモデル選択

解析対象のデータを確定



データを説明できるような統計モデルを設計

(帰無仮説・対立仮説)

(単純モデル・複雑モデル)



ネストした統計モデルたちのパラメーターの最尤推定計算

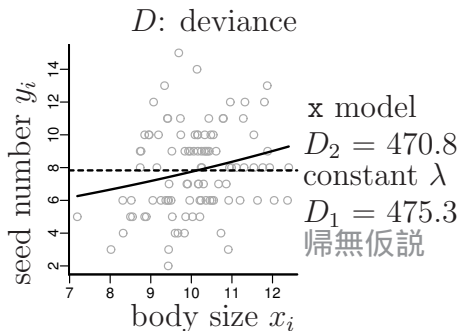
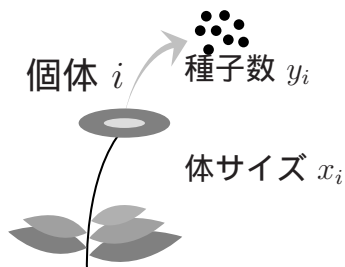


帰無仮説棄却の危険率を評価



モデル選択規準 AIC の評価

## また同じ例題





(施肥処理は無視!)

# 検定統計量 $\Delta D_{1,2}$

difference in deviance  $\Delta D_{1,2} = D_1 - D_2 = 4.51 \approx 4.5$

likelihood ratio? —  $\log \frac{L_1^*}{L_2^*} = \log L_1^* - \log L_2^*$

model	$k$	$\log L^*$	Deviance $-2 \log L^*$	
constant $\lambda$	1	-237.6	$D_1 = 475.3$	帰無仮説 
x	2	-235.4	$D_2 = 470.8$	対立仮説 

検定の非対称性: 帰無仮説はゴミあつかい  
 .....にもかかわらず、帰無仮説だけをしつこく調べる

# 検定の目的: 帰無仮説 の棄却

観察された逸脱度差  $\Delta D_{1,2} = 4.5$  は.....

帰無仮説は

「めったにない差」  
(帰無仮説を棄却)

「よくある差」  
(棄却できない)

真のモデルである

第一種の過誤

(問題なし)

真のモデルではない

(問題なし)

第二種の過誤



is ...

significant

(Reject )

not significant

(Not reject )

TRUE

**Type I error**

(no problem)

NOT true

(no problem)

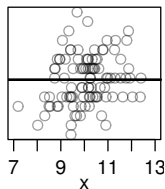
**Type II error**

検定の非対称性: 第一種の過誤だけに注目

$\Delta D_{1,2}$  の分布を生成: ブートストラップ尤度比検定

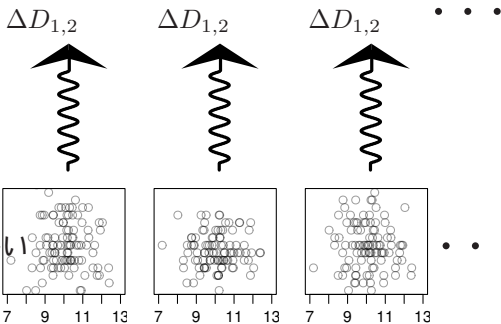
帰無仮説  が真のモデルであるとして!

帰無仮説が真の統計モデル  
ということにしてしまう  
( $\hat{\beta}_1 = 2.06$  のポアソン分布)



帰無仮説のモデルから新しい  
データをたくさん生成する

評価用データに constant  $\lambda$  と x model  
をあてはめて逸脱度差  $\Delta D_{1,2}$  の分布を予測



あてはまりの良さ評価用のデータ (多数)



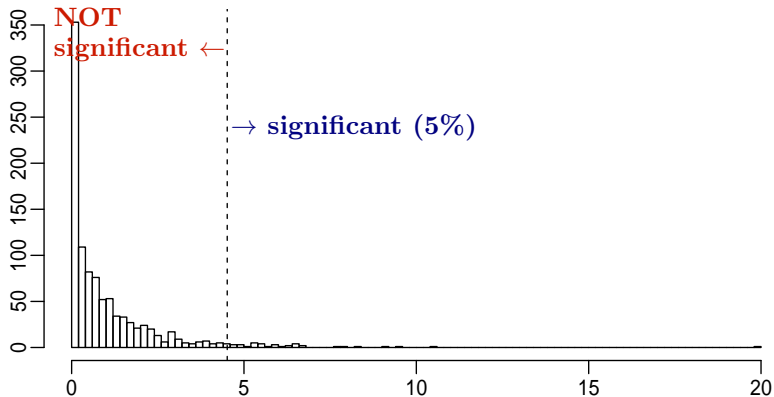
## How to generate $\Delta D_{1,2}$ under **is TRUE?**

```
> d$y.rnd <- rpois(100, lambda = mean(d$y))  
> fit1 <- glm(y.rnd ~ 1, data = d, family = poisson)  
> fit2 <- glm(y.rnd ~ x, data = d, family = poisson)  
> fit1$deviance - fit2$deviance
```

- `rpois()` によるポアソン乱数の生成 (架空データ)
- 架空データを使って `glm()` あてはめ

# あらかじめ棄却域を決めておく

たとえば 5% とか？



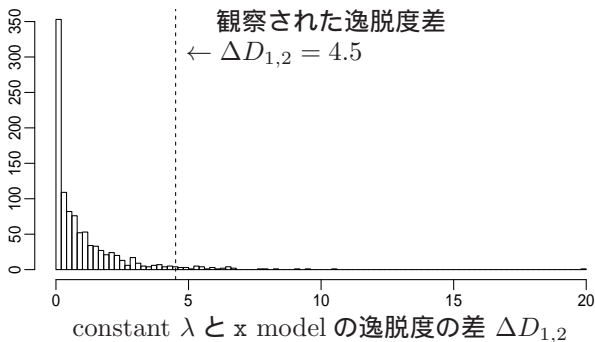


# A random $\Delta D_{1,2}$ generator in R

```
get.dd <- function(d) # データの生成と逸脱度差の評価
{
  n.sample <- nrow(d) # データ数
  y.mean <- mean(d$y) # 標本平均
  d$y.rnd <- rpois(n.sample, lambda = y.mean)
  fit1 <- glm(y.rnd ~ 1, data = d, family = poisson)
  fit2 <- glm(y.rnd ~ x, data = d, family = poisson)
  fit1$deviance - fit2$deviance # 逸脱度の差を返す
}

pb <- function(d, n.bootstrap)
{
  replicate(n.bootstrap, get.dd(d))
}
```

# Generated distribution of $\Delta D_{1,2} = D_1 - D_2$



(R code is in the next page)

$$\text{Probability}\{\Delta D_{1,2} \geq 4.5\} = \frac{38}{1000} = 0.038$$

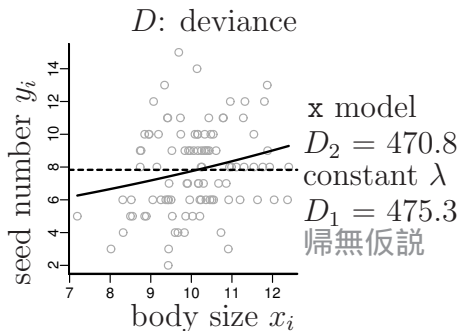
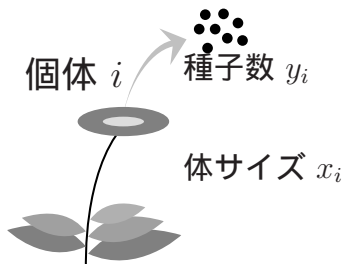
```
> source("pb.R") # reading "pb.R" text file
> dd12 <- pb(d, n.bootstrap = 1000)
> hist(dd12, 100) # to plot histogram
> abline(v = 4.5, lty = 2)
> sum(dd12 >= 4.5)

[1] 38
```

so-called “ $P$ -value” is 0.038.

In this case, 帰無仮説  is rejected

So we can state that 対立仮説  can be accepted.  
 $x$  model is better than constant  $\lambda$ .



# In case that $P > 0.05$ ...?

何も結論できない .....

λ 一定のモデルが良いとは言えない

検定の非対称性: 帰無仮説  はけっして受容されない