

2004.04.21

(甲山さん講義の代理)

## 特別補習

# 失われた指数関数・対数関数の修復

— 生態学ぎょーかい「よくでる」関数たち —

<http://hosho.ees.hokudai.ac.jp/~kubo/stat/2004/>

講釈: 久保拓弥 [kubo@ees.hokudai.ac.jp](mailto:kubo@ees.hokudai.ac.jp)

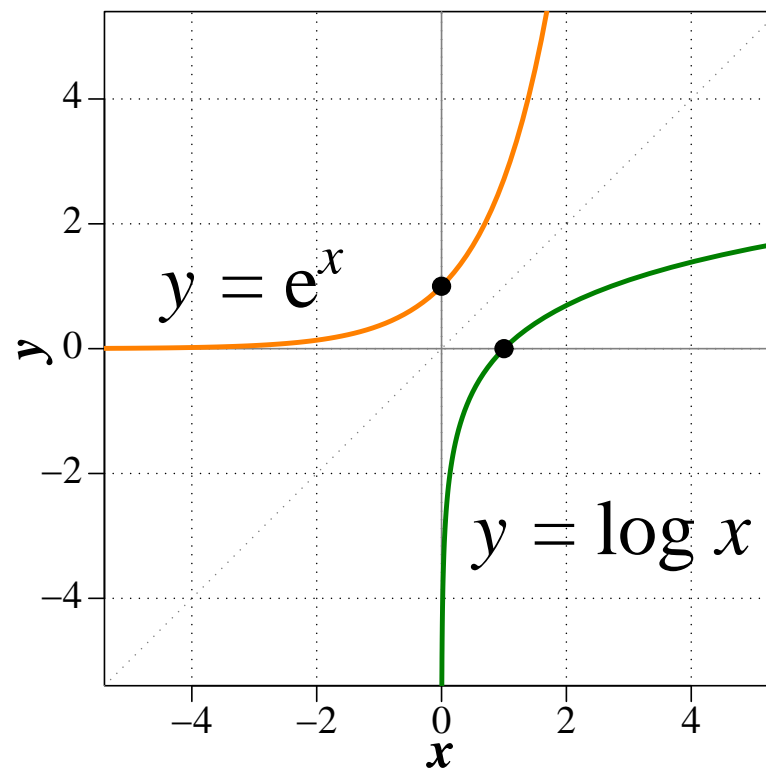
## 今日のハナシ: 忘れじの指数関数・対数関数

1. 指数関数  $y = \exp(x)$
2. 対数関数  $y = \log(x)$
3. 練習問題 (.....時間あれば生態学での応用)

「使わなければ忘れる」.....これは是非もなし．これからの研究生活で  $\exp$  と  $\log$  を「忘れ続ける」か，それとも**自分の道具**として甦らせるか？

## 今日の要点 (!)

これさえ思い出してもらえらるようになれば，それでいいです



## さけられない指数関数・対数関数 in 生態学

- (例)
- $N(t) = N(0) \exp(rt)$ 
    - 指数関数的**増殖**: 時間  $t$  の個体数  $N(t)$
  - $W \approx aH^b \rightarrow \log(W) \approx \log(a) + b \log(H)$ 
    - **アロメトリー**: 体重  $W$  と身長  $H$  の関係
  - $\bar{w} = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \log(w_t) dt\right)$ 
    - 時間変動する環境下での平均**適応度**  $\bar{w}$

生態学の理論的側面においては指数関数・対数関数がよく使われる……教科書・論文・講義を**理解**するためには**高校数学**をかなり思いだす必要がある。

## データ解析・統計学も exp と log だらけ

- (例)
- $f(y) = \frac{\lambda^y \exp(-\lambda)}{y!}$  — Poisson 分布
  - $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} \exp\left[-\frac{(\log(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$  — 対数正規分布
  - $p(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\beta_0 + \beta_1 x + \dots)]}$   
— logistic モデル; 死亡確率の推定計算などに使う

統計学的なデータ解析とは**モデリング**(数理モデルの構築・推定そして値の生成)に他ならない.....ここでも指数関数・対数関数は多用される。

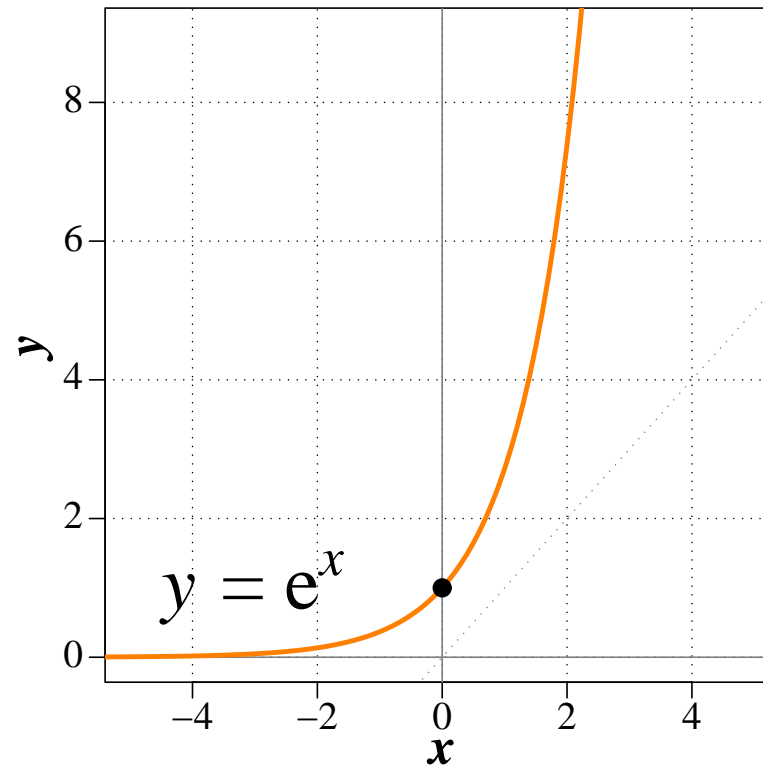
## 指数関数への道

- 指数関数の一般的な定義:  $y = a^x$
- $a^x$  を  $x$  で一階微分しても  $a^x$  となるという便利
- そこで  $a \rightarrow e = 2.7182818\dots$  なる **Napier 数** と定めると……(どうやって計算したかは略; 計算したいヒトは  $e^x$  を Taylor 展開してみよ)
- めでたく  $\frac{de^x}{dx} = e^x$  となる
- 今日は「指数関数」といえば  $y = e^x$  に**限定**する
- **練習問題**:  $a^x = e^?$  (ヒント:  $\log$  が必要)

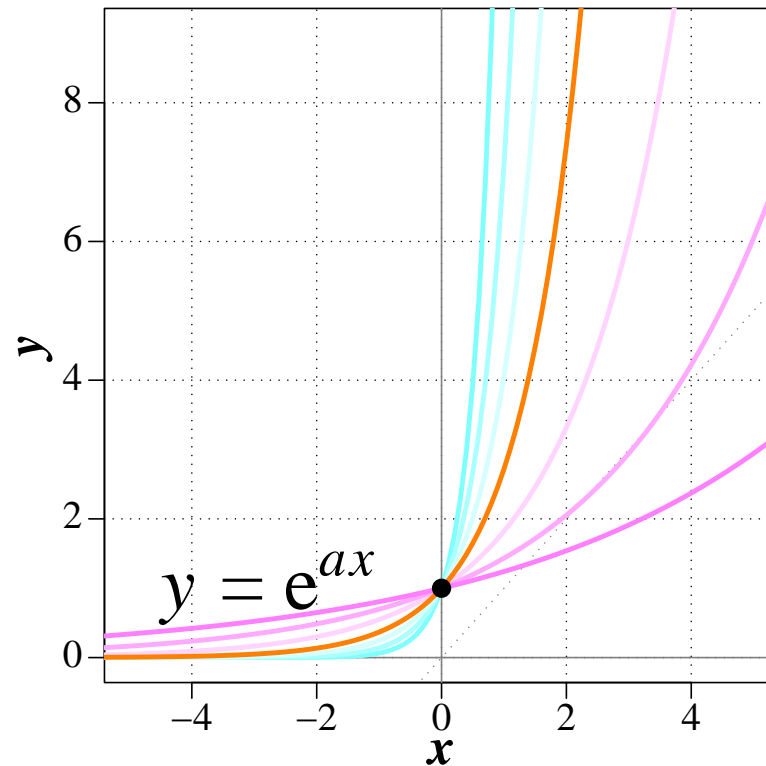
## 指数関数: $y = e^x = \exp(x)$

### 基本的な性質

- $y$  は常に正;  $y > 0$
- $y$  は単調増加;  $\frac{dy}{dx} > 0$
- $\frac{dy}{dx} > 0$  も単調増加;  $\frac{d^n y}{dx^n} > 0$
- 点  $(0, 1)$  を通過する



指数関数:  $y = e^{ax} = \exp(ax)$

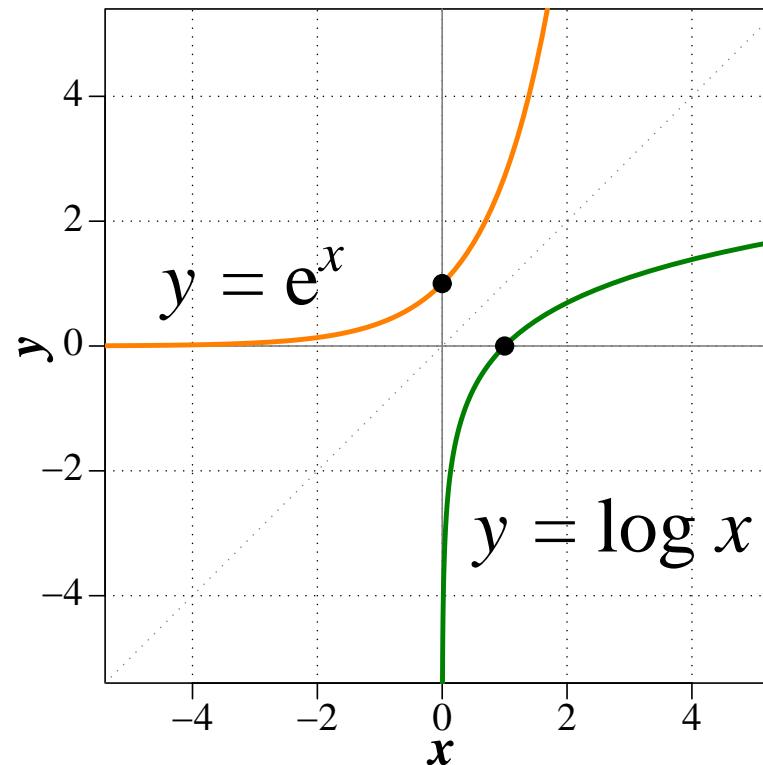


- $y$  は常に正;  $y > 0$
- $y$  は単調増加;  $\frac{dy}{dx} > 0$
- $\frac{dy}{dx} > 0$  も単調増加;  $\frac{d^n y}{dx^n} > 0$
- 点 (0, 1) を通過する



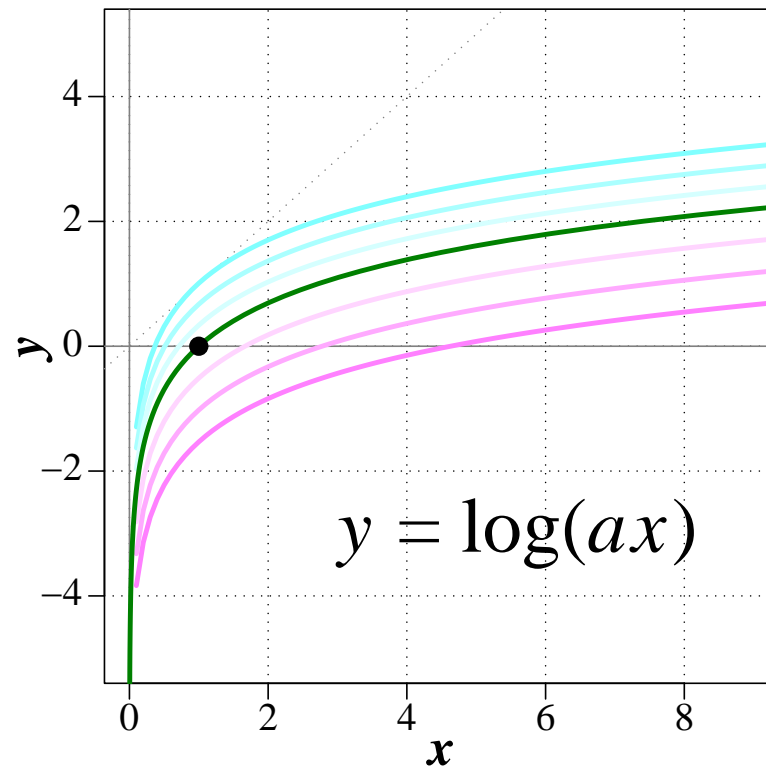
## 対数関数: $y = \ln x = \log(x)$

- $y = e^x$  の逆関数
- 底 (てい; base): Napier 数  $e = 2.7182818\dots$  を底とする対数を自然対数という; 今回はこれを「対数」とよぶ
- 常用対数:  $y = \log_{10} x$   
( $y = 10^x$  の逆関数)
- 底の変換:  $\log_{10} x = ? \log?$
- $y$  は単調増加;  $\frac{dy}{dx} > 0$
- $\frac{dy}{dx} < 0$  は単調減少



- $x$  のとりうる範囲は正のみ
- 点  $(1, 0)$  を通過する

# 対数関数: $y = \log(ax)$



練習問題: つねに  $(1, 0)$  を通る  $y = ? \log(?x)$  とは

**練習問題: 指数関数の書き換え**

1.  $\exp(a + b) = ?$

2.  $\exp(ab) = ?$

3.  $\exp(a) \exp(b) = ?$

4.  $\log(\exp(a)) = ?$

5.  $\exp(\log(a)) = ?$

**練習問題: 指数関数の微分・積分**

1.  $\frac{d}{dx} \exp(x) = ?$

2.  $\frac{d}{dx} \exp(ax) = ?$

3.  $\frac{d}{dx} \exp(ax + b) = ?$

4.  $\int \exp(x) dx = ?$

**練習問題: 対数関数の書き換え・微分・積分**

1.  $\log(ab) = ?$

2.  $\log\left(\frac{a}{b}\right) = ?$

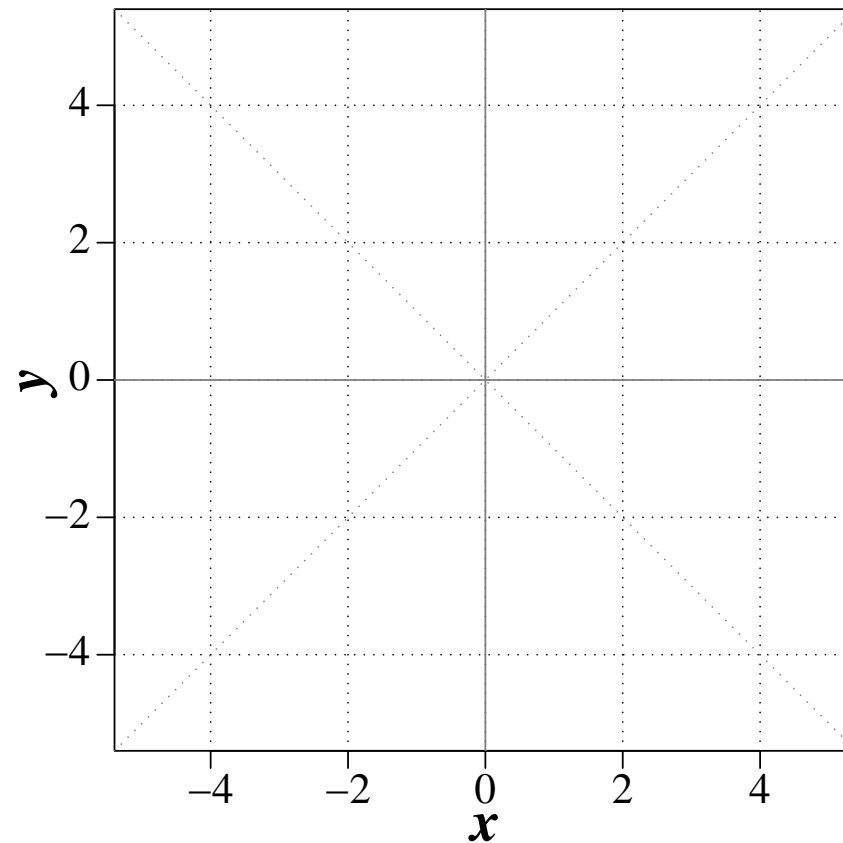
3.  $\log\left(\frac{ab}{c}\right) = ?$

4.  $\frac{d}{dx} \log(x) = ?$

5.  $\frac{d}{dx} \log(ax + b) = ?$

## 練習問題: 作図

$y = \exp(-x)$  と  $y = \log(-x)$  のグラフを描け



## 今回の作図に使ってる – 統計ソフトウェア R

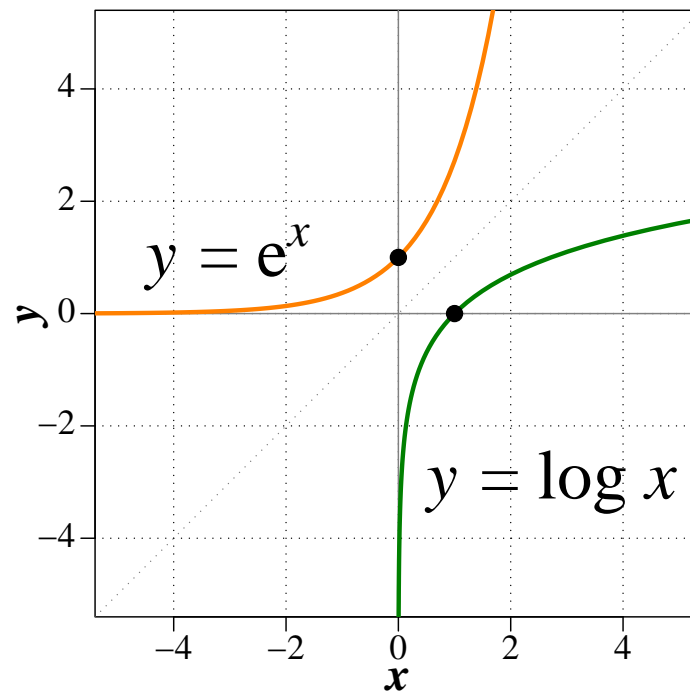
<http://www.r-project.org/>

- いろいろな OS で使える **freeware**
- 使いたい機能が充実している
- **作図**機能も強力
- S 言語による **プログラミング**可能
- よい教科書が出版されつつある
  - “Introductory Statistics with R” P. Dalgaard (2002)
- **ネット上**のあちこちに資料多数
  - Yahoo! Japan:  
<http://dir.yahoo.co.jp/Science/Mathematics/Statistics/Software/R/>



## 本日のまとめ

1. 生態学研究に「高校数学」は必要（十分ではない）



2. わからない式みたら図を描く（描かせる!）