Chapter 6 Prior

飯島勇人（山梨県森林研）

hayato.iijima@gmail.com

この章で大事なこと（要約）

- 事前分布によって事後分布も変わりうる
- 無情報事前は有用だが、指定の仕方によっては思わぬ問題点が発生
  - 非正則
  - 変換不変性

6.1 AN EXAMPLE WHERE PRIOR MATTERS

- 超幾何分布が尤度の場合の2つの事例の紹介
- 事前分布を色々変えてみる

超幾何分布の紹介

- 超幾何分布

$$f(m|M,N,n) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

  - 具体例：M個の赤玉、N個の白玉が入った箱からn個の玉を非復元抽出したときに、赤玉がm個得られる確率
  - 「何個の内の何個」というデータの尤度関数として使える

Mのベイズ推定

- 30個の玉が入っている箱から20個の玉を取る
  - 18個が赤玉だった→30個の内の赤玉の数は？
  - 尤度：超幾何分布
  - 事前分布：離散一様分布
  - 事後分布：$$\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\sum_{H=m}^{N-(n-m)}\binom{H}{m}\binom{N-H}{n-m}}$$
  - choose(N, n)および1/(N+1)はMについて定数なので無視

Mの推定結果

- 結果はTable 6.1 （p.112）
  - 例えば、Mも18個（赤玉は残っていない）の確率は choose(18, 18) = 1; choose(30-18, 20-18) = 66なので、1*66/44352165=1.5e-06
- なぜ18≦M≦28なのか？
  - すでに赤玉を18個取り出している→17以下はあり得ない
  - すでに白玉を2個取り出している→29以上はあり得ない

ハマヒメドリの性比推定

- ハマヒメドリの亜種（*Ammodramus maritimus nigrescens*）
  - 絶滅寸前（6羽！）で、飼育下での増殖が試みられる
  - 捕獲できた5羽は全て雄
    →あと1羽が雌である確率は？
  - 推定したいのはM
  - Nは6、nは5、mは5

想定可能な事前分布

- 雄である確率：
  - 0〜1の全ての値が等確率：一様分布
  - 半々：二項分布
- 捕獲確率：
  - 雌雄で同じ：
  - 雌雄で違う：雌雄ごとに捕獲確率を一様分布で与える

事前分布と事後分布

- 雄である確率の事前分布（捕獲確率一定）
  - 全て等確率：M=5なら1*1/7=1/7, M=6なら1*6/7=6/7
  - 半々：M=5なら$1*1*{}_6C_5/12=1/2$, M=6なら$1*6*{}_6C_6/12=1/2$

事前分布

- 捕獲確率の事前分布
  - 雌雄で同じ
  - 雌雄で独立：雌雄別に一様分布で生起確率pを与える
- 結果はTable 6.2（p.114）
  - 性比を1/2に固定→雌を得る確率が上昇
  - 捕獲確率を雌雄別に決定→雌を得る確率が上昇（？）

6.1のまとめ

- 事前分布を変えれば事後分布も変わる
- 特にサンプル数が少ないときの影響は大
- 使う事前分布をよく吟味する必要がある

6.2 OBJECTIVE BAYESIAN INFERENCE

- 無情報事前分布とその問題点の紹介
  - 一様分布
    - 変換不変性
    - 非正則事前分布
  - Jeffreys事前分布

導入

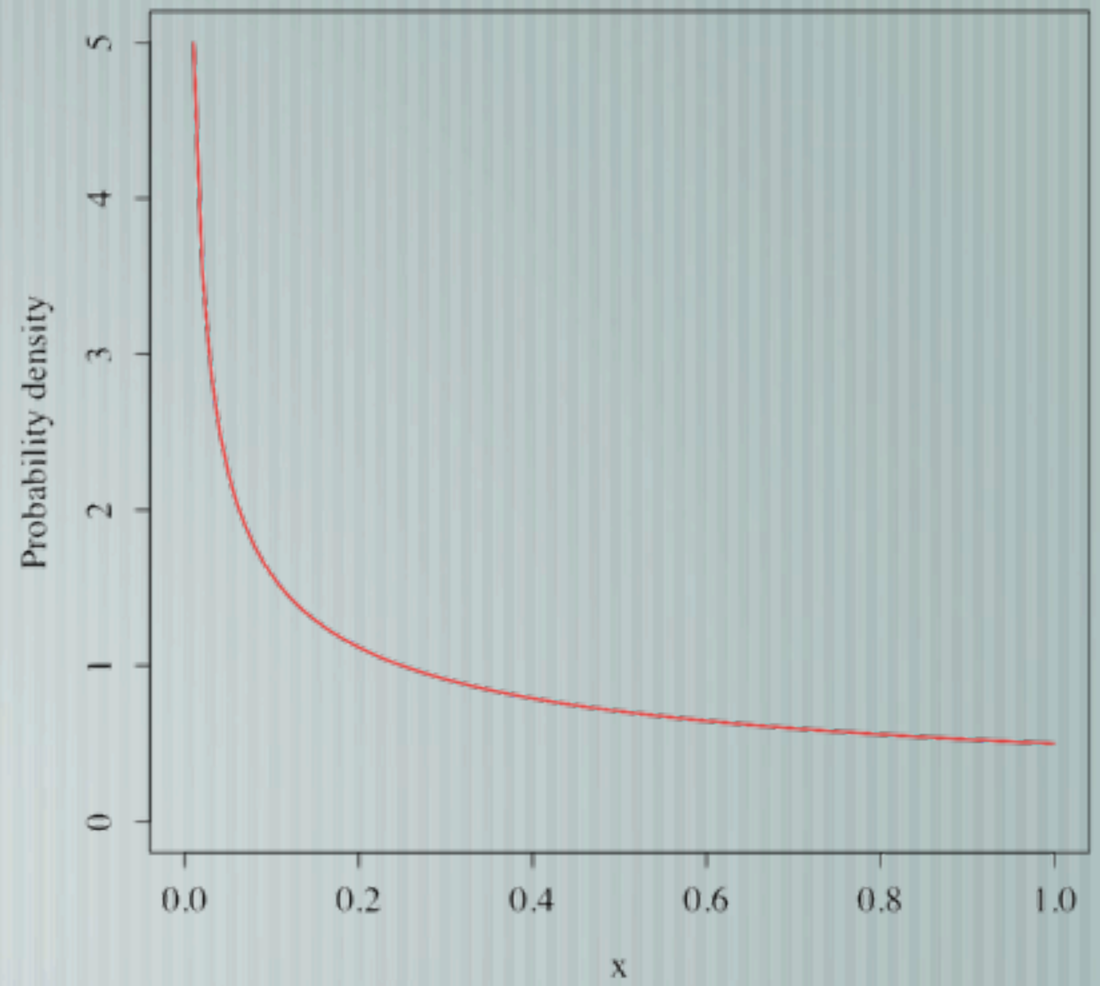
- 前節で事前分布が推論に与える影響を検討
- 事前の知識がない場合どうするか？

　→無情報事前分布を使う

- 一様分布が無情報事前分布としてよく用いられるが、一様分布には種々の問題点がある

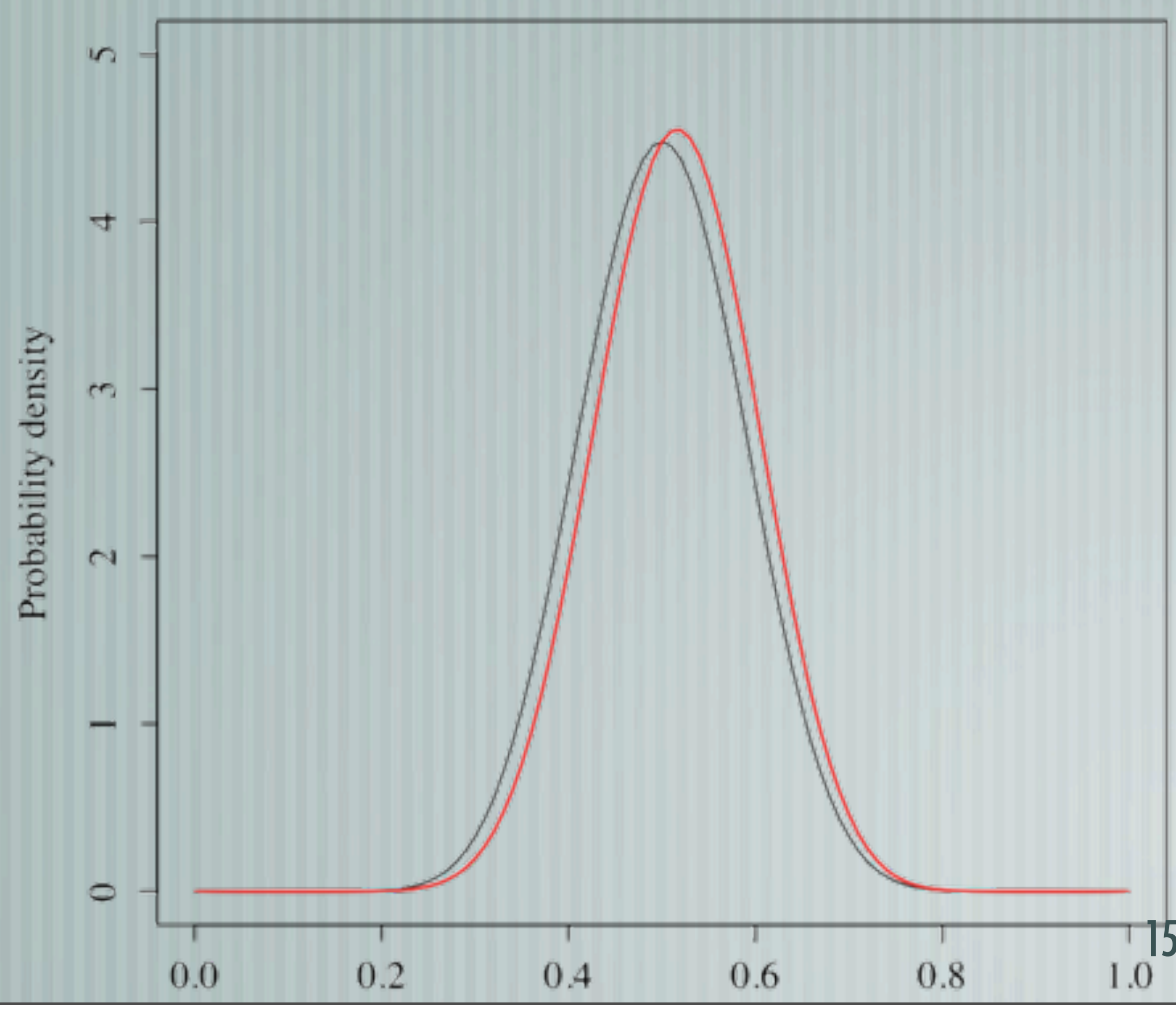
変換不変性

- 変換してもパラメータの意味が不変
- 逆の例：パラメータpの事前分布が一様分布
  - $X \mid p \sim B(N, p);\ p \sim U(0, 1) = Be(1, 1)$
- ではp^2の分布は？
  - 無情報ではない
  - $p^2 \sim Be(1/2, 1)$



変換不変性2

- 変換不変性がないことは深刻な問題か？
- そうではないこともある（Fig. 6.3）



非正則な事前分布

- 非正則（Improper）とは何か？
  - 積分しても収束しない、1にならない
  - 厳密な意味での確率分布にならない
- しかし、事前分布が非正則でも事後分布は正則になることがある
- 古谷（2008）でも同様の指摘（訳者付け足し）

非正則なベータ分布

- 二項分布の共役事前分布はベータ分布
  - 共役事前分布：事前分布と事後分布が同じ分布になるような事前分布（尤度との関係で決定される）
    - 二項分布における試行数N、成功数X; B(N, X/N)
    - なぜなら $Be(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$
    - よって、二項分布とベータ分布の積は Be(α-1+X, β-1+N-X)となり、ベータ分布となる

非正則なベータ分布2

- 無情報なベータ分布; Be(1, 1)
  - 無情報ならより情報の少ないBe(0, 0)の方がいいのでは？
- Be(0, 0)、すなわち$p^{-1}(1-p)^{-1}$は非正則
- しかし事後分布はBe(0+X, 0+N-X)で正則
  - 非正則事前分布を用いても事後分布が正則になるケース

非正則な正規分布

- 事前分布として分散が無限大の正規分布
  - $N(\mu_0, v_0)$で $v_0 \to \infty$
  - 無情報事前分布になりそうだが、分散が無限大であれば非正則（積分しても１にならない）

非正則な正規分布2

- $X|\mu = N(\mu, \sigma^2/n)$があり、平均μの事前分布が $\mu = N(\mu_0, v_0)$；ただし、$v_0 \to \infty$なので非正則
- 事後分布$\mu|X = N(\mu_1, v_1)$の平均と分散は式6.10と6.11

Jeffreys事前分布とは？

- Fisher情報量の平方根（に比例）
- 変換不変性がある
- 関連用語の整理
  - スコア関数（式6.12）：尤度関数の対数の1次導関数
  - Fisher情報量（式6.13）：スコア関数の2次モーメントの期待値

スコア関数とFisherの情報量

- スコア関数
  - データXが固定の元でパラメータθの変化率を示す
  - 期待値は0
- Fisher情報量
  - スコア関数の2次モーメントの期待値
  - つまりスコア関数の分散

Jeffreys事前分布

- Jeffreysが1946年に提唱
- パラメータθの事前分布はFisher情報量の平方根に比例する
- 式6.14から変換不変性がある

二項分布とJeffreys事前分布

- 尤度が二項分布の場合の
  - スコア関数：$X/p - (n - X)/(1 - p)$
  - Fisher情報量：$Var(X)/(p(1 - p))^2$
- よってJeffreys事前分布は$p^{-1/2}(1 - p)^{-1/2}$
- これはBe(1/2, 1/2)に等しい

多変数モデル

- 先のJeffreys事前分布は1変数の場合
- ほとんどのモデルは多変数
  - 1つ1つのパラメータについて事前分布を設定し、それらの積を統合された事前分布とする
  - Fisherの情報行列（情報量の多変数版）を用いて事前情報を得る
- 多変数に対するJeffreys事前分布は発展途上

この節のまとめ

- （初めて出てくる事項もあるけど_|￣|○）
- 無情報事前分布には様々な種類がある
  - 一様分布、共役事前分布、Jeffreys事前分布
  - 二項分布のパラメータpに対し、これらの事前分布を適用してもそれほど事後分布は変わらない（Fig. 6.4）

この節のまとめ2

- Jeffreys事前分布は時に非正則だが、事後分布はほぼ常に正則
- Jeffreys事前分布を用いると、事後分布の信用区間は頻度論の信頼区間と一致することが多い

6.3 AFTERWORD

- ベイズに固有の事前分布をどう指定するか
  - 積極的に事前情報を取り込む、または
  - 無情報（あるいはそれに近い）事前分布を活用する
- モデルごとに適切な事前分布を考える
  - ......のだがこのくだりの意味がわかりません^^;)
  - ということで全訳の方へ（全訳p.14のGelman（2006）......）

（訳者による）章全体まとめ

- 事前分布は多少なりとも事後分布に影響
- 「王道」の事前分布はあるが、モデルごとに事前分布をよく考える
- 一様分布は無情事前分布として用いられるが、変換不変性や正則かどうかに注意