

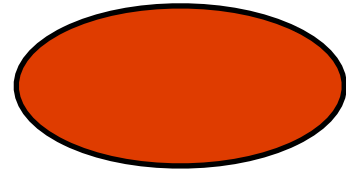
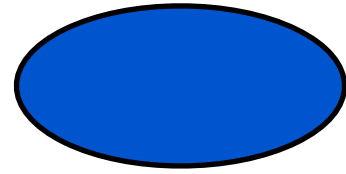
「選ぶ、対戦する」データの解析

—Bradley-Terry モデルとその親戚たち

粕谷 英一 (九大・理・生物)

2011.3.8札幌

2つの”もの”



選ぶ

比べる

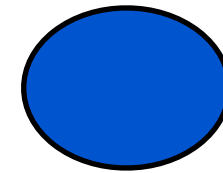
争う

たたかう

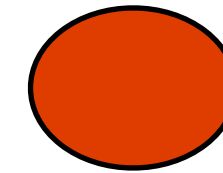
2つの”もの”

食べ物を選ぶ

選ぶ

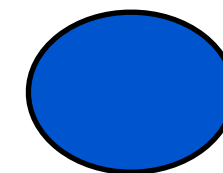


選ばれない

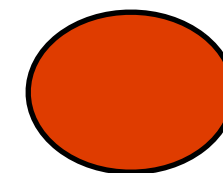


個体が争う

負ける



勝つ



対比較

paired comparison

対比較 paired comparison

人間の心理的特徴

人間の感覚 官能検査

1860年ころから

動物の食物選び

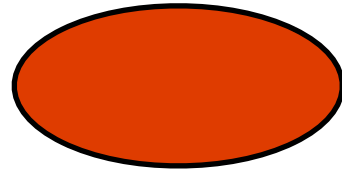
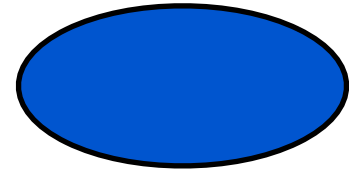
動物の闘争行動 (順位制)

Landauなど

対立遺伝子の発現

2つの”もの”

こういう過程は
生物のあちこち
にある



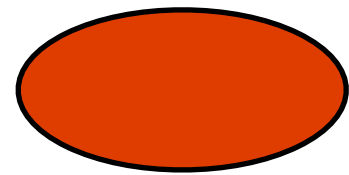
選ぶ

比べる

争う

たたかう

片方



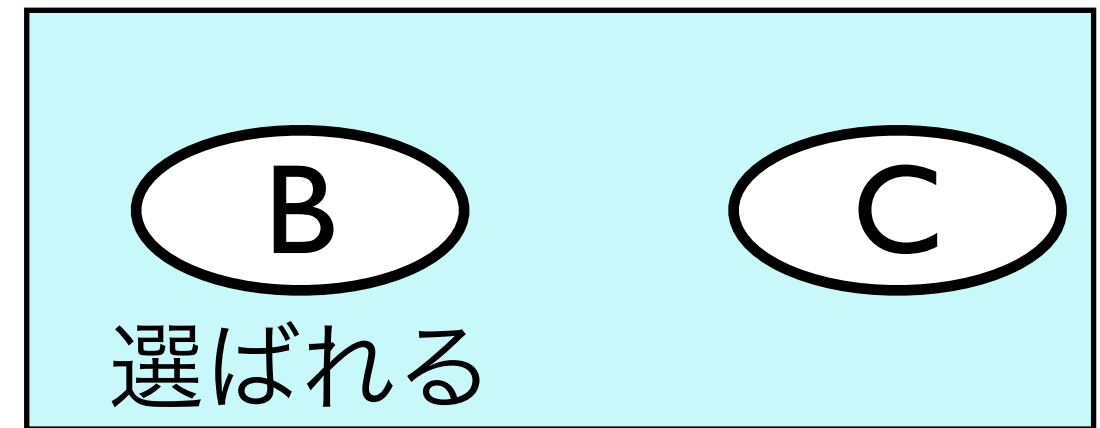
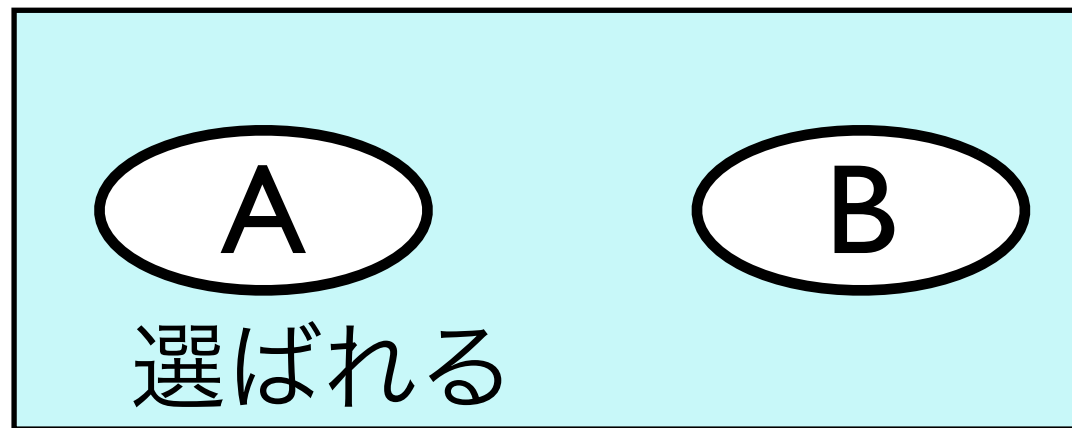
選ばれる

勝つ

...

一度に2つしか比べられない

”もの”が3つ以上あると



複雑さが増して、別の問題に

n個の”もの” $0.5n(n-1)$ 通りの対比較

nの2乗

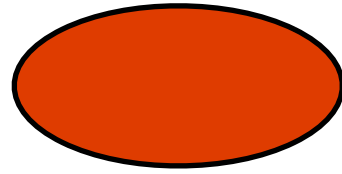
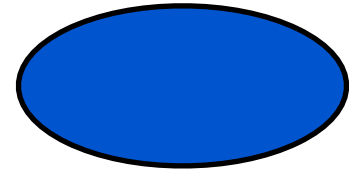
2個体の組：ダイアド

$0.5n(n-1)$ 個のダイアド

3個体の組：トライアド

2つの”もの”

こういうデータは
価値が低いのか？



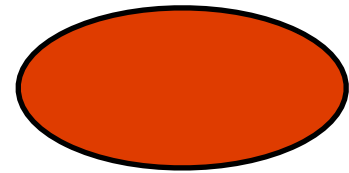
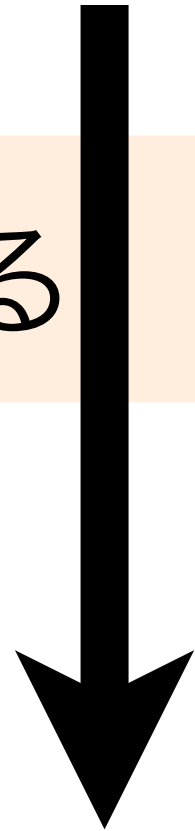
選ぶ

比べる

争う

たたかう

片方



選ばれる

勝つ

...

「そんなことはなく、
むしろおもしろい」


対比較のデータ “もの”が3つ以上ある

ある種の秩序的なもの

どの“もの”よりよく選ばれる
どの“もの”より選ばれない
中間的な“もの”

トライアド（3個体の組）

推移的

ものA > ものB ものB > ものC  ものA > ものC

完全に推移的

どのトライアドも推移的

完全に推移的

ダイアドごと $0.5n(n-1)$ 個のパラメーター

オブジェクトごと $(n-1)$ 個のパラメーター

個体の性質との関係

ノンパラメトリックな方法

Kendallのcoefficient of consistence τ (1940) など

中央値検定などと類似、頑健

帰無仮説 (nullモデル)

ダイアドでどちらのオブジェクトが優勢になる確率も0.5

全体の推移性の評価

推移的なトライアドの個数

データ：2値的にする

ダイアドでどちらのオブジェクトの勝ちが多いか

帰無仮説 (nullモデル)

ダイアドでどちらのオブジェクトが優勢になる確率も0.5

帰無仮説が正しいときに 完全に推移的になる確率

オブジェクト 3 個の場合

ダイアドは 3 個で、可能な全パターンは $2^3=8$ 通り

8のうち6つは、完全に推移的 ABC ACB BAC BCA CAB CBA

本当はオブジェクトの強弱の差がなくても、75%は完全に推移的

帰無仮説が正しいときに nullモデル 完全に推移的になる確率

オブジェクト	3個	75%
	4個	37.5%
	5個	11.7%
	6個	2.2%
	7個	0.2%

5個まで：完全に推移的になる確率が5%より大きい

通常の有意水準での検定はできない

**オブジェクト数が多くないと、強さの差がなくても
推移的に見えやすい**

‘素朴な’方法

相手に関係なく
オブジェクトごとに
勝ち数と負け数



勝率

ダイアドごとの勝率を
出して、その平均



勝率の平均

6 オブジェクト

オブジェクトに強弱のちがい 最強（勝率0.62） 最弱（勝率0.34）

ダイアドあたり”対戦”回数：5,8,11,14からランダム

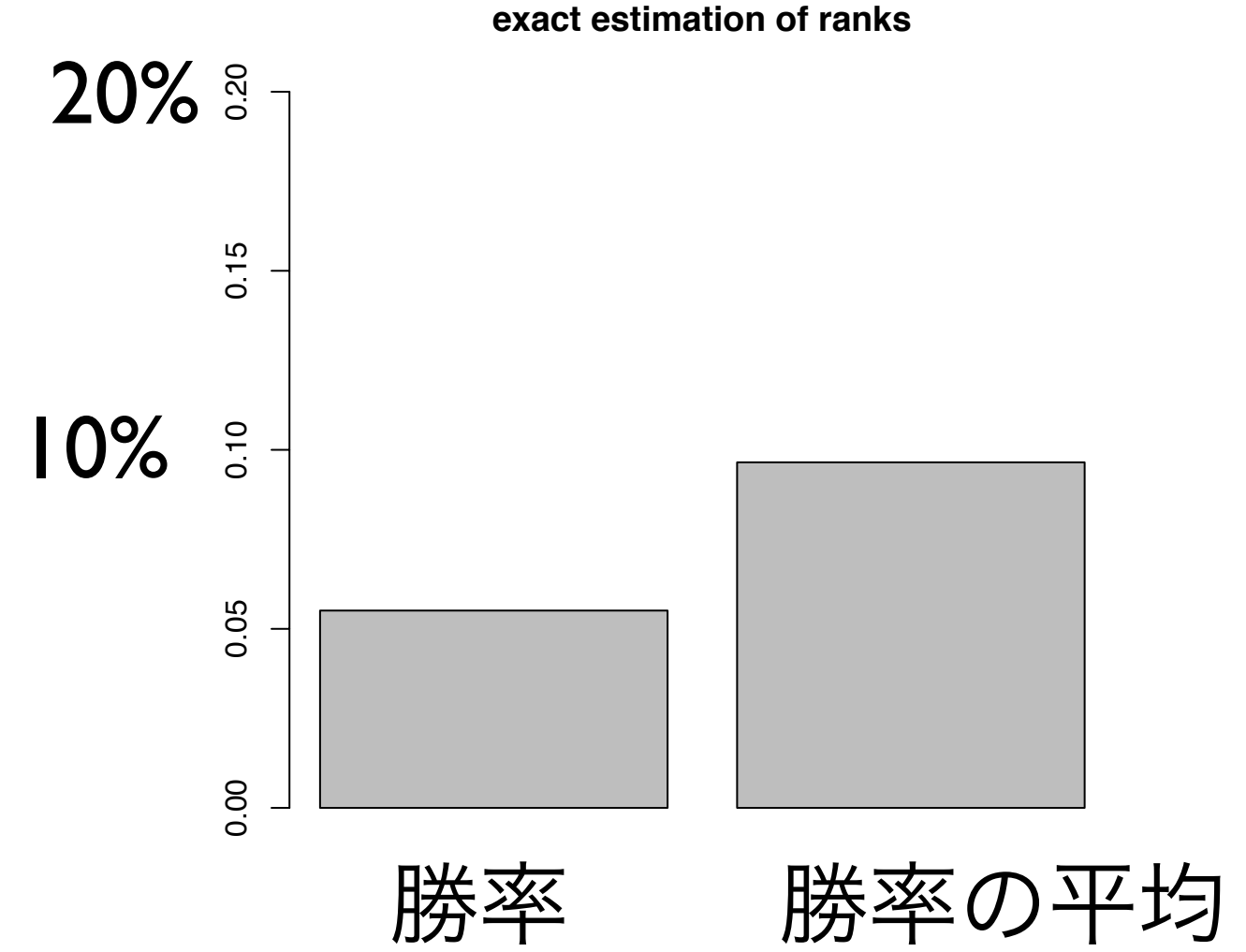
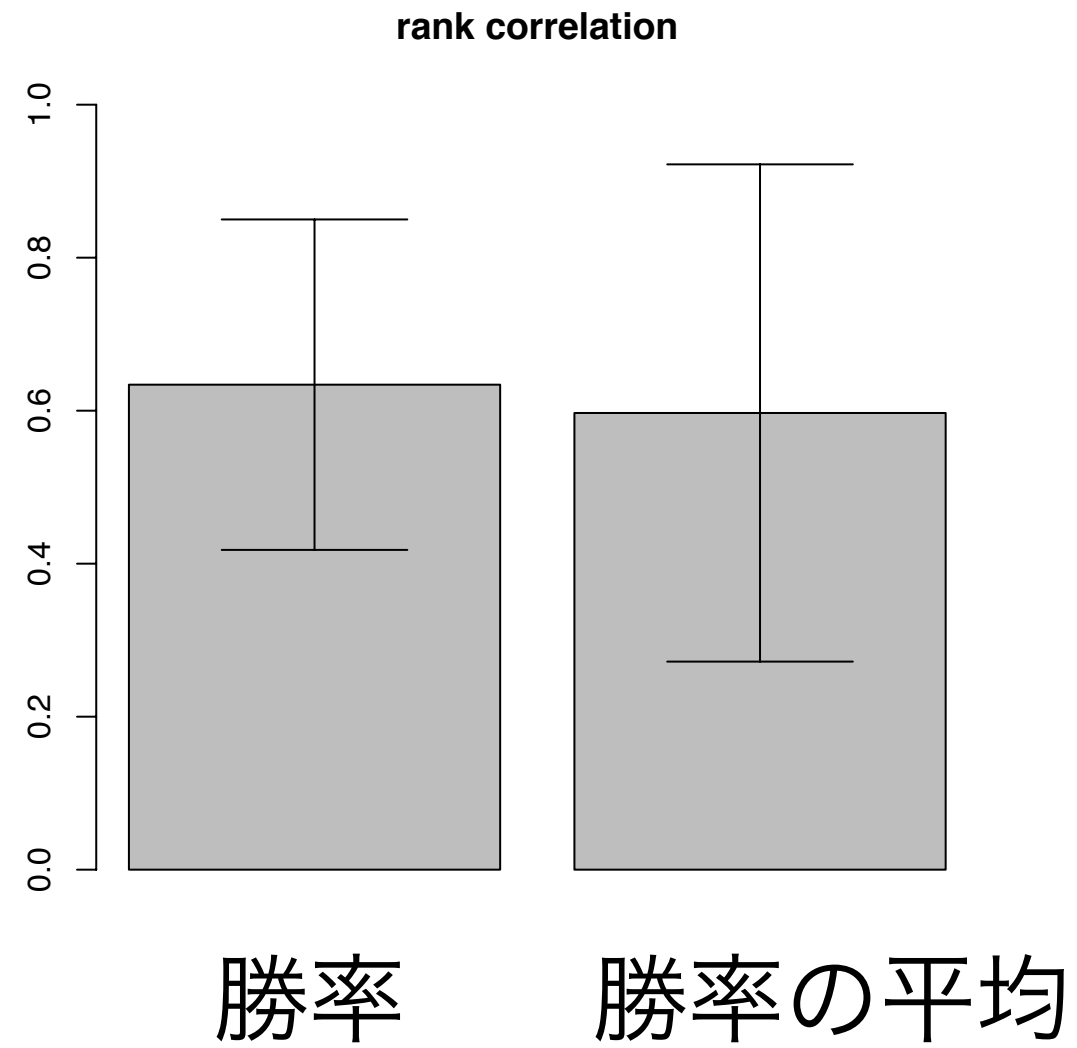
ただし、最強と最弱の間のみ！

10000回繰り返し

’素朴な’方法にあまり
不利ではない

強さの順位と推定された順位の相関

強さの順位を正確に推定できた割合



強さの順序と勝率の順位の間

強さの順序と勝率の順序が一致

Bradley-Terryモデル

オブジェクトAとB Aが勝つ確率 ← オブジェクトAの「強さ」
 オブジェクトBの「強さ」

オブジェクトAの強さ π_A
 オブジェクトBの強さ π_B

$$Aが勝つ確率 = \frac{\pi_A}{\pi_A + \pi_B}$$

π を定数倍しても変わらない

paired comparisonのlinear models
 ほかにThurstone-Mostellerモデル

Bradley-Terryモデル

オブジェクトAの強さ π_A オブジェクトBの強さ π_B

$$Aが勝つ確率 = \frac{\pi_A}{\pi_A + \pi_B} = \frac{\exp(V_A)}{\exp(V_A) + \exp(V_B)}$$

変形して

$$\log\{\text{確率} / (1 - \text{確率})\} = (V_A - V_B)$$

切片（定数項）のないロジスティック回帰

Bradley-Terryモデル 最尤法

利点

各オブジェクトの強さが定量的に推定できる

推定誤差が得られる

尤度に基づく検定やモデル選択が使える

時期や指標によるちがい

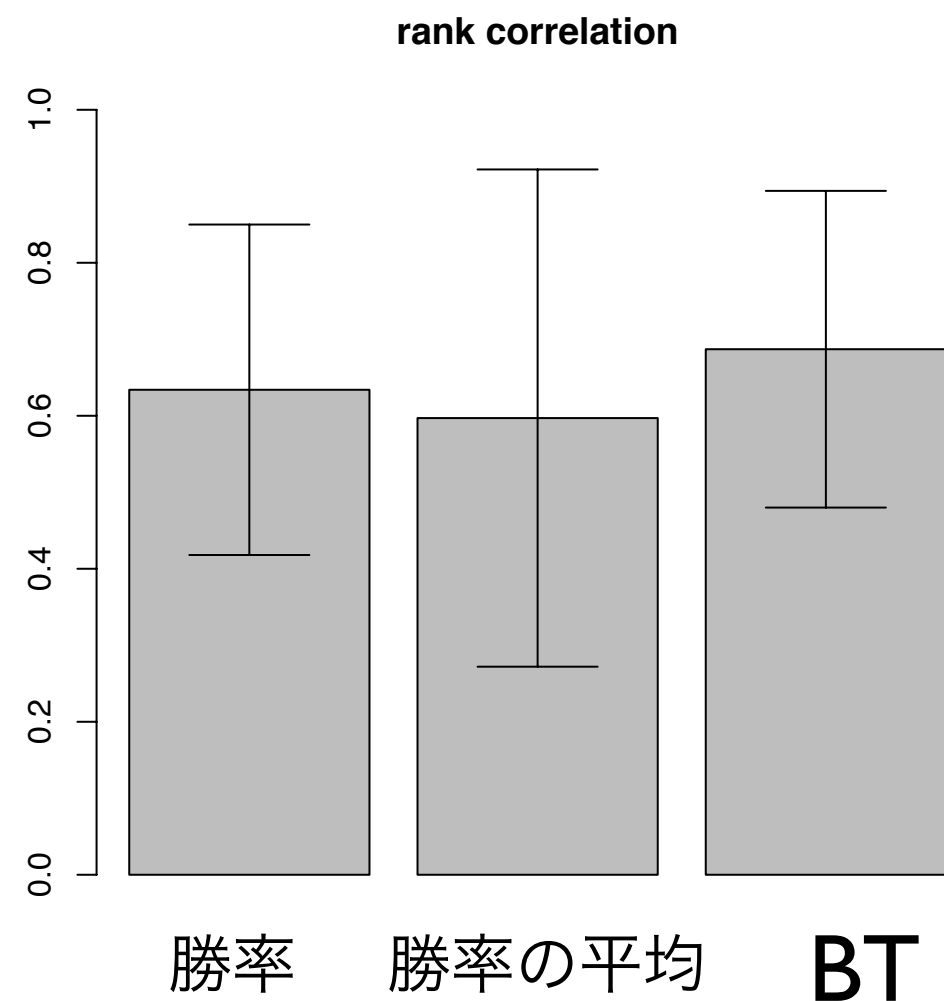
他の説明変数の効果

推移性が全体に成り立っているか検定などができる

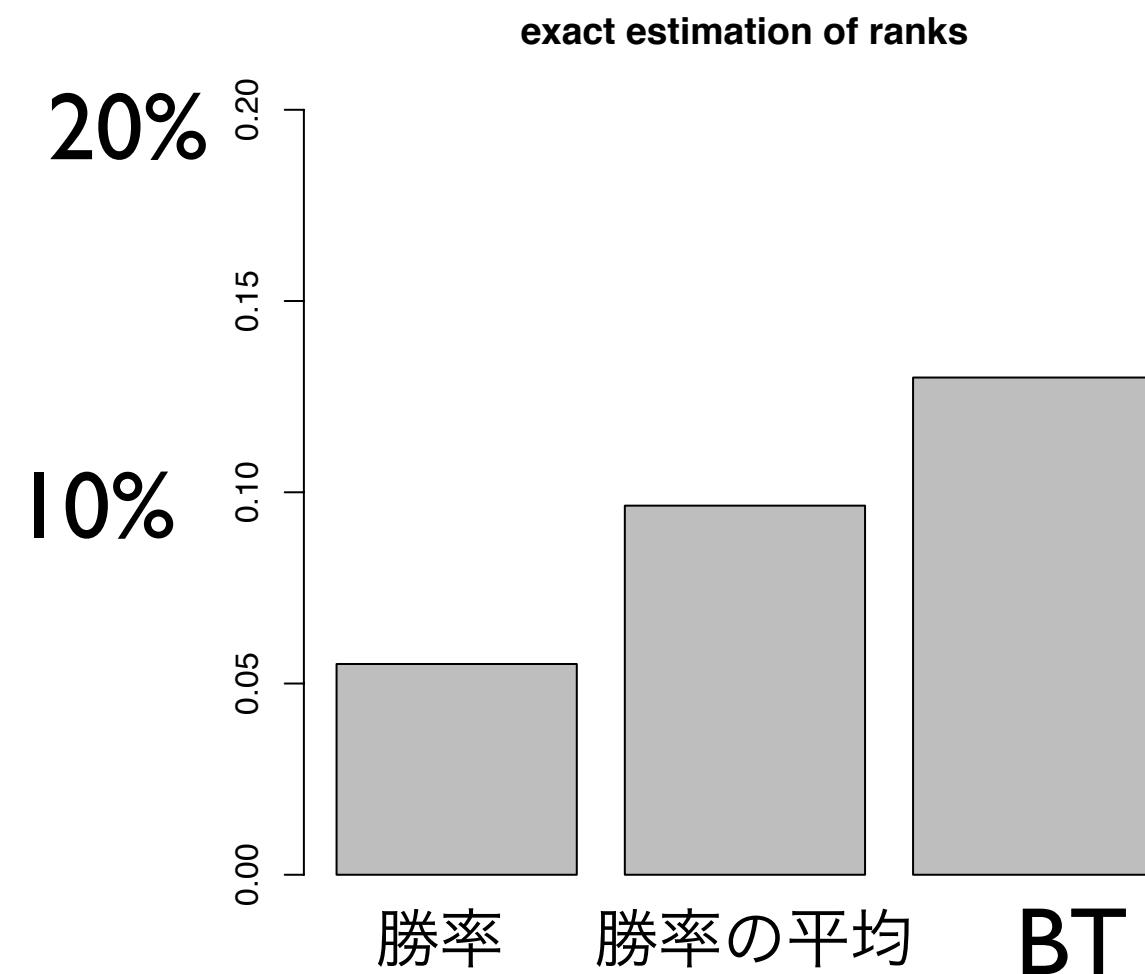
問題点

どのオブジェクトにもすべて勝つorすべて負ける
(複数オブジェクト)

Bradley-Terryモデルと'素朴な'方法



強さの順序と勝率の順位の間



強さの順序と勝率の順序が一致

Bradley-Terryモデル 最尤法

利点

各オブジェクトの強さが定量的に推定できる

推定誤差が得られる

尤度に基づく検定やモデル選択が使える

時期や指標によるちがい

他の説明変数の効果

推移性が全体に成り立っているか検定などができる

RのパッケージBradleyTerry2

LearnBayes Psychotree eba prefmodなど

Bradley-Terryモデル

分析の例

日本のプロ野球 (NPO)

12チーム

2010年の結果

パシフィック・リーグ

セントラル・リーグ

ソフトバンク
日本ハム
オリックス
ロッテ
楽天
西武

ヤクルト
広島
中日
横浜
巨人 (読売)
阪神

同じリーグのチームと各24試合、ちがうリーグのチームと各4試合
交流戦

勝率で順位決定 (過去には引き分け0.5勝や勝利数で決定)

日本のプロ野球 (NPO)

12チーム

パシフィック・リーグ

セントラル・リーグ

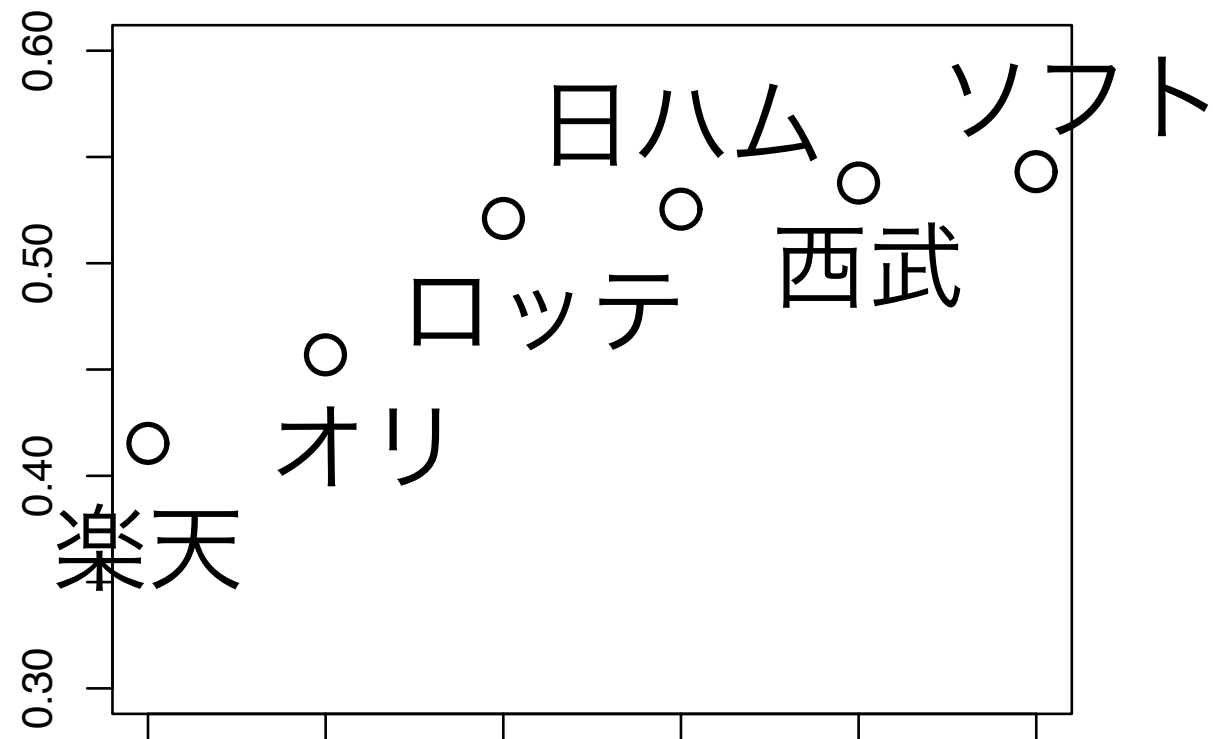
同じリーグのチームと各24試合、
ちがうリーグのチームと各4試合
交流戦

全ダイアドで比較がある

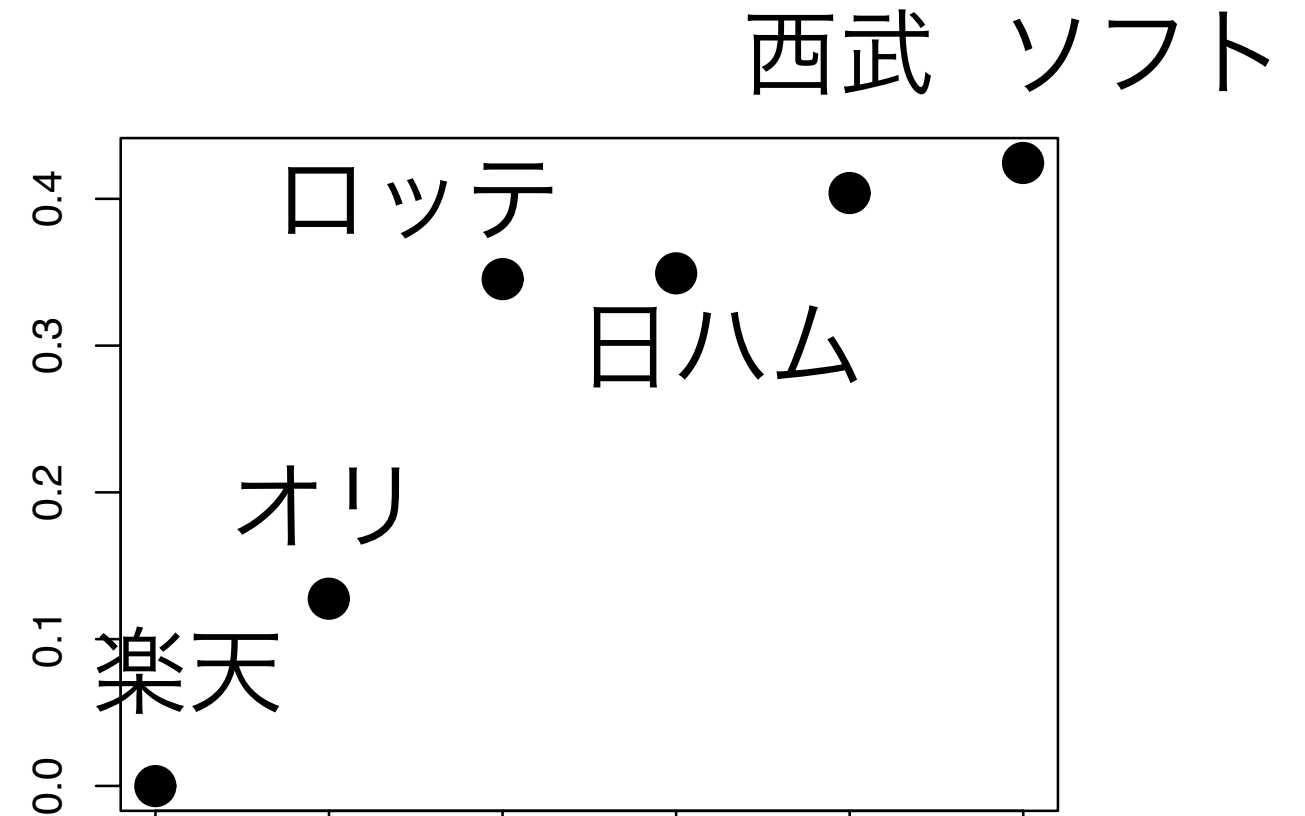
同じリーグでは、1ダイアドあたり比較回数が20を超える

**同じリーグとは1ダイアドあたり比較回数が多く、
ちがうリーグとは少ない**

リーグ内勝率



BTモデルによる強さ



じゃんけんの構造があり、推移性の程度が小さい

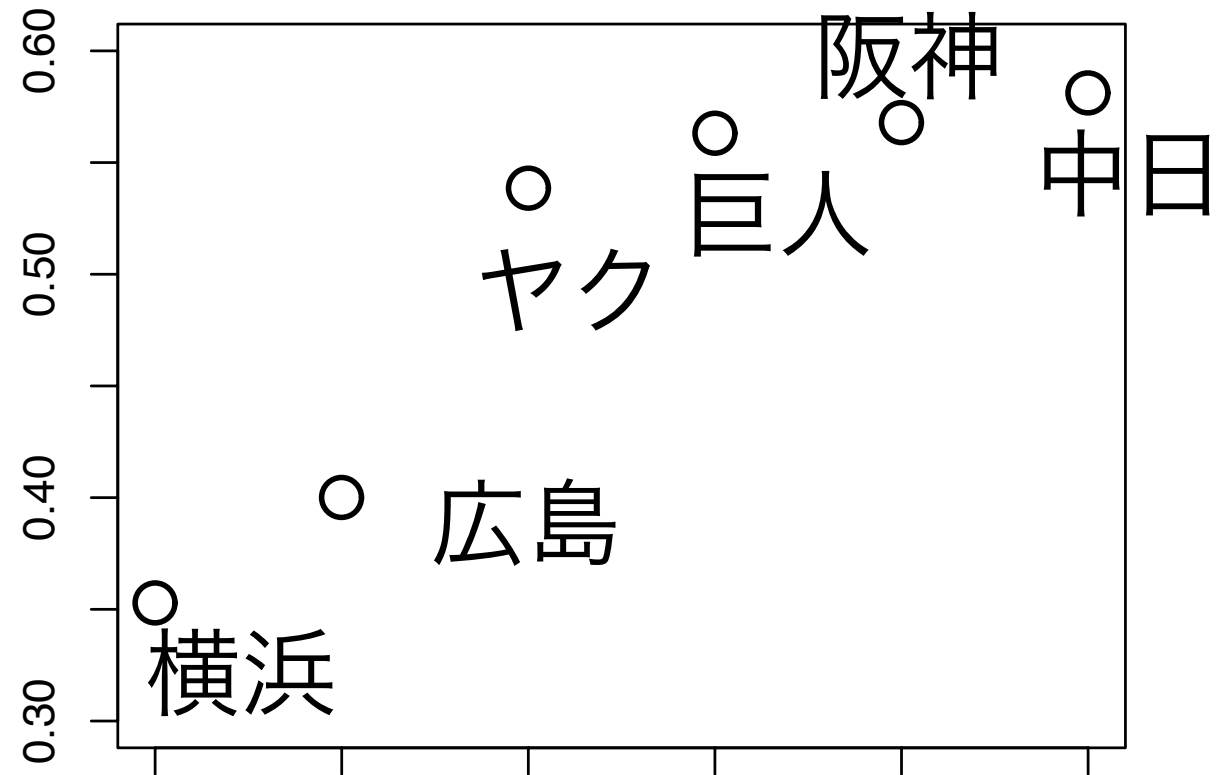
nullモデルとBTモデル
devianceの差 = 5.01

検定すると $P=0.41$

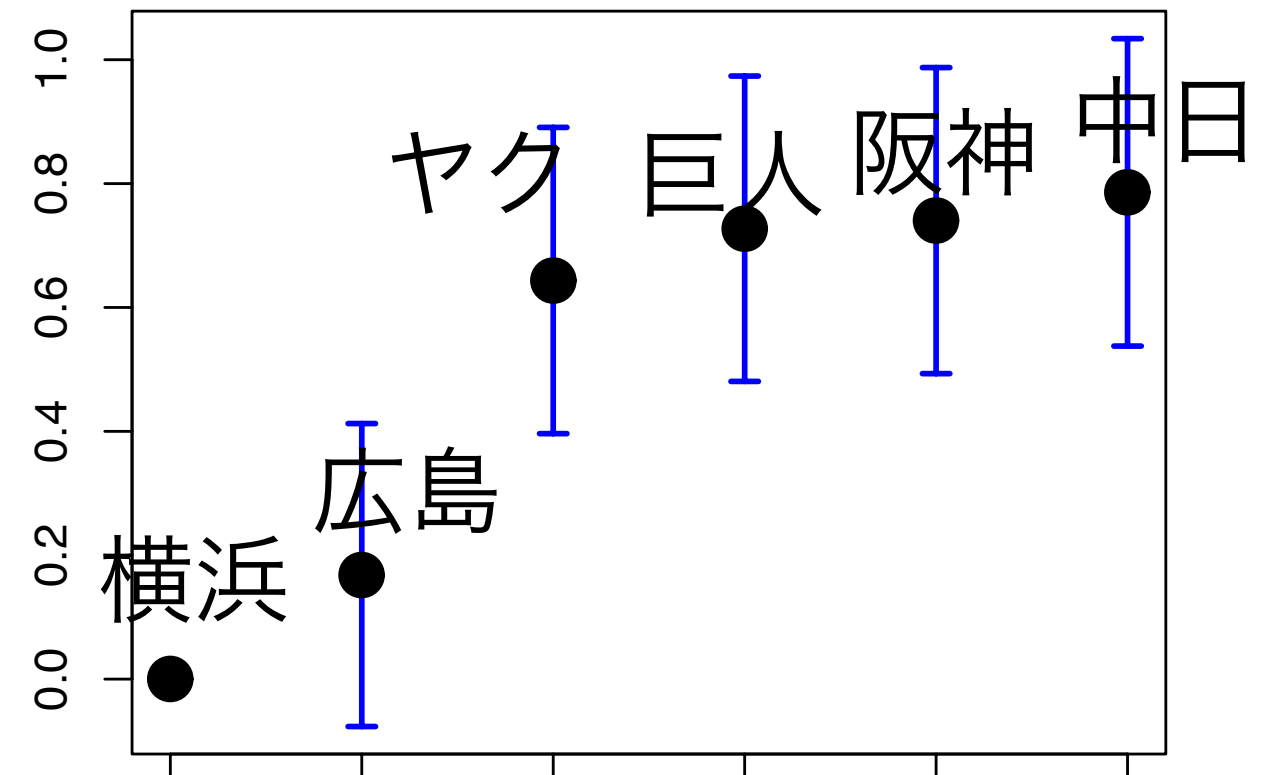
AICではnullモデル採用

セントラル・リーグ

リーグ内勝率



BTモデルによる強さ

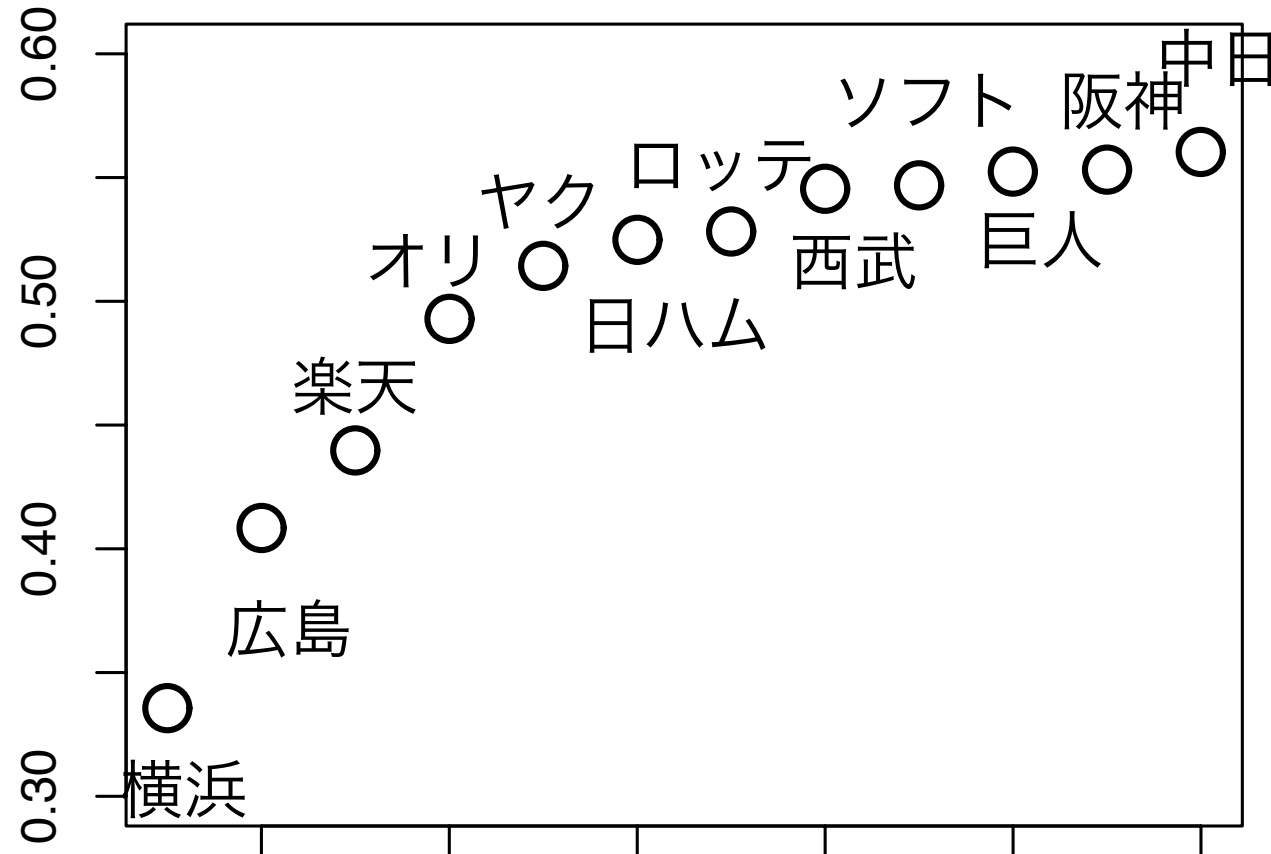


nullモデルとBTモデル
devianceの差 = 19.36

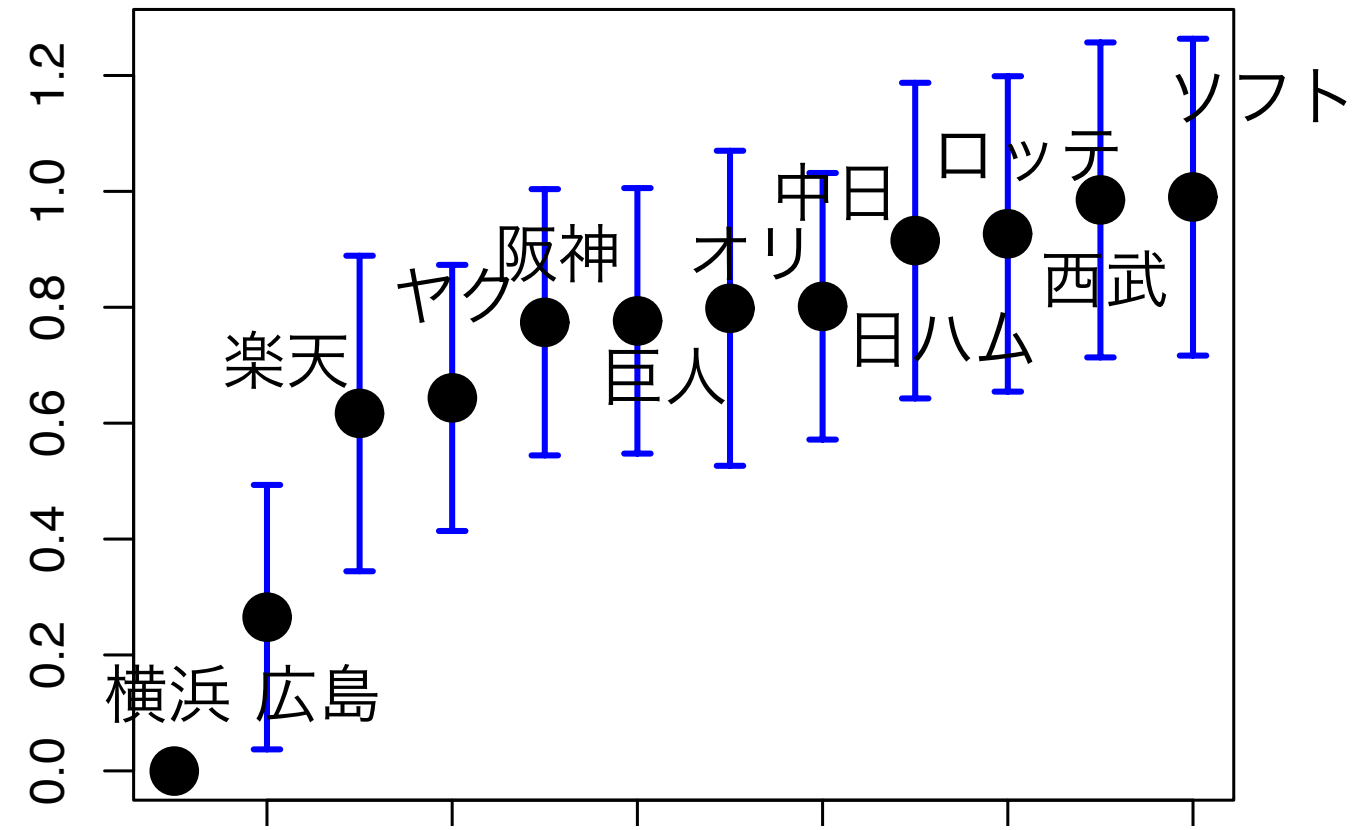
検定すると $P=0.0016$
AICではBTモデル採用

全体

勝率



BTモデルによる強さ

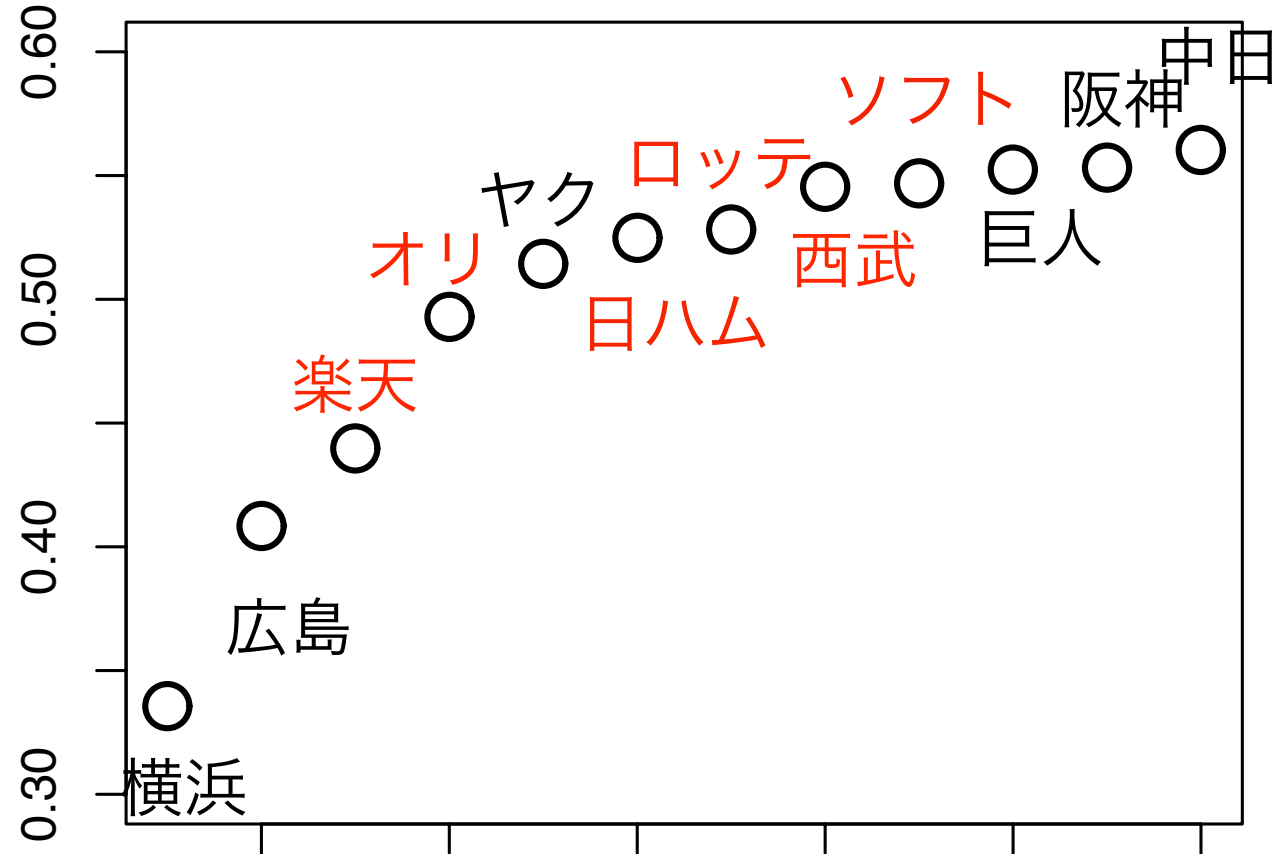


nullモデルとBTモデル
devianceの差 = 29.43

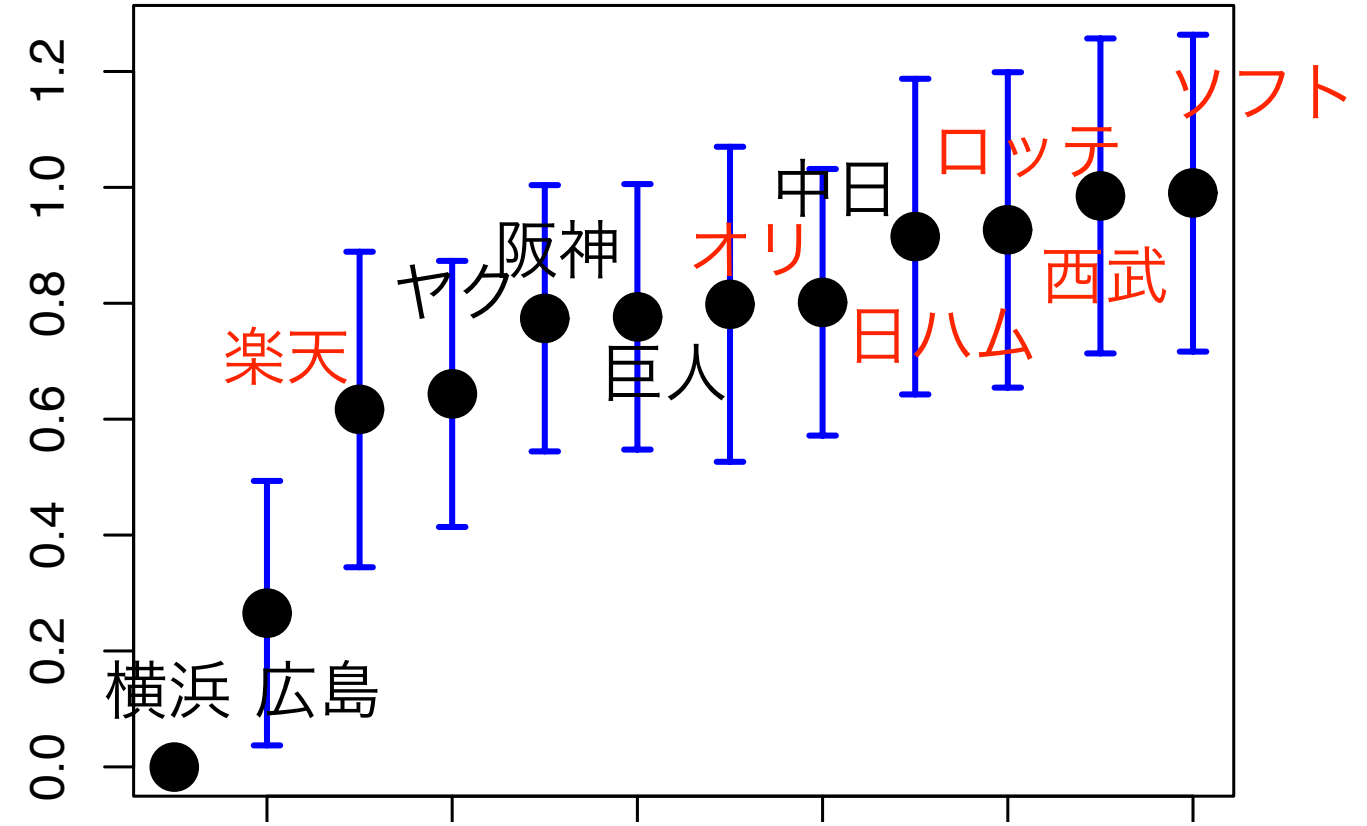
検定すると $P=0.0019$
AICではBTモデル採用

全体

勝率



BTモデルによる強さ



'素朴な'方法 (勝率) がうまくいかないとき

複数のサブグループ：グループ内回数多い、グループ間回数少ない

説明変数

各オブジェクトの「強さ」 隠れた変数

変数のタイプ

1つのオブジェクトについては変わらない

object-specific player-specific

対戦ごとに異なる contest-specific

例. order effect 1-0

説明変数

日本のプロ野球の例

1つのオブジェクトについては変わらない

例. 年俸総額

対戦ごとに異なる

シンプルな例. order effect オブジェクトを感じる順序

例. ホーム/アウェイ (本拠地かどうか)

A, Agrestiの『Categorical Data Analysis』に分析例あり +7.5%

セントラルリーグ

年俸総額の効果（パラメーター） 0.01861 ± 0.0127

一億円あたり0.46%勝利確率アップ（同じ強さのとき） $z=1.63$

検定では $p > 0.05$ 、AICでは年俸を含むモデル

全体

年俸総額の効果（パラメーター） 0.01442 ± 0.009

一億円あたり0.36%勝利確率アップ（同じ強さのとき） $z=1.53$

検定では $p > 0.05$ 、AICでは年俸を含むモデル

対比較の状況はたくさんある

Bradley-Terryなどのモデルのご利益

オブジェクト数が増えると直感は困難かつ混迷

人はパターンを見つけてしまう